УДК 51-77, 330.45

Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием

© И. В. Лутошкин,[1] Н. Р. Ямалтдинова[2]

Аннотация. Строится динамическая, непрерывная относительно времени, модель оптимального управления рекламными расходами с учетом эффекта запаздывания реакции потребителей на рекламные воздействия и ранее совершенные покупки. Решается задача максимизации прибыли фирмы на плановом периоде при ограничении, отражающем реакцию целевой аудитории. Проблема формулируется в виде системы уравнений типа Вольтерра.

Ключевые слова: управление рекламными расходами; распределенная отдача от рекламы; эффект рекламного воздействия; эффект воздействия предыдущих продаж; оптимальное управление; интегральные уравнения типа Вольтерра

1. Введение

Для разработки фирмой грамотной рекламной стратегии по оптимизации затрат на рекламу в плановом периоде, необходимо знать, каким образом реклама воздействует на потенциальных покупателей. При этом нужно учесть, что между однократным рекламным сообщением и совершением некоторыми потребителями покупок может образовываться лаг запаздывания. Это может объясняться различными причинами. Например, если ознакомление с информацией о товаре произошло не напрямую, а через третьи лица, которые в свою очередь таким же образом могли познакомиться с продуктом спустя промежуток времени после запуска рекламного сообщения. Также после ознакомления с рекламным объявлением потребителю зачастую необходимо время для того, чтобы обдумать необходимость приобретения прорекламированного товара, а после принятия решения о покупке – время до ее совершения.

Для построения модели также важно учесть влияние совокупности других факторов, стимулирующих потребителей повторно приобретать продукт данной фирмы, например, его качество, сформировавшаяся привычка и др. При этом влияние ранее совершенной покупки на текущую так же может со временем возрастать на начальном этапе до определенного момента, после чего ослабевает, и влияние в большей степени оказывают более поздние покупки.

Также отметим, что влияния рекламного воздействия и (или) предыдущих продаж падают со временем практически до нуля, с какого-то момента оказывая ничтожно малое воздействие на текущие продажи. Поэтому имеет смысл рассматривать фиксированный интервал для лагов наиболее существенного влияния рекламного воздействия и(или) предыдущих продаж на текущую выручку.

На сегодняшний день существуют различные подходы к управлению рекламными расходами. Выделяя подходы, основанные на математическом моделировании, можно отметить: вероятностные модели, учитывающие охват, частоту показа [1]; регрессионные эконометрические модели [2]; динамические дискретные и непрерывные модели [3], [4]. Однако существующие непрерывные модели управления рекламными расходами предполагают учет только мгновенной реакции от воздействия. В настоящей работе предлагается

[1] Заведующий кафедрой экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; lutoshkiniv@ulsu.ru.

[2] Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск

развитие динамической непрерывной модели управления рекламными расходами, предложенной в работах [5], [6]. При этом в модели учитываются распределенные эффекты воздействия рекламы и предыдущих продаж фирмы.

2. Постановка проблемы

Обозначим через $x(t)$ выручку (выпуск) фирмы и $u(t)$ величину рекламных затрат в момент времени t. Очевидно, что выручка $x(t)$ определяется множеством факторов на рынке: репутация фирмы (зарабатывается некоторое время), уровень воздействия на спрос через свою рекламу u (реклама имеет эффект последействия), различные воздействия конкурентов, общая экономическая ситуация. Учет всех возможных факторов является очень сложной задачей, в дальнейшем, сделав упрощения, будем предполагать, что объем спроса ограничен только возможностями фирмы, экономическая ситуация стабильна, воздействия конкурентов принципиально не меняются на временном промежутке планирования, выполняется локальное равновесие на рынке: спрос равен предложению (выпуску).

Таким образом, можно предположить, что текущая выручка фирмы определяется только двумя факторами: накопленное рекламное воздействие $v(t)$ к моменту t и репутация фирмы $y(t)$ в момент t, которые можно связать соотношениями:

$$v(t) = \int_{\tau_{0u}}^{\tau_{1u}} G_u(\tau)u(t-\tau)d\tau; \tag{2.1}$$

$$y(t) = \int_{\tau_{0x}}^{\tau_{1x}} G_x(\tau)x(t-\tau)d\tau; \tag{2.2}$$

$$x(t) = f(v(t), y(t)). \tag{2.3}$$

Здесь $[\tau_{0u}; \tau_{1u}]$ – временной интервал, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие, $[\tau_{0x}; \tau_{1x}]$ – временной интервал, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж (накопленная репутация фирмы), $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$ - функции, определяющие характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно. В общем случае величины τ_{0u}, τ_{1u}, τ_{0x}, τ_{1x} являются функциями времени t, при этом $\tau_{0u} < \tau_{1u} \le t$, $\tau_{0x} < \tau_{1x} \le t$.

Определение вида функций $f(v, y)$, $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$ – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или представляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции и т.д. При этом, некоторые общие предположения относительно характера данных функций можно привести.

В частности, функция $f(v, y)$ практически всегда предполагается монотонно возрастающей по своим переменным. Предположение о монотонном росте является справедливым, когда переменные v и y имеют относительно небольшое значение, т.е. фирма не насытила рынок своей продукцией (услугами), реклама воспринимается потребителями позитивно. Однако по мере роста рекламных воздействий на потребителей реакция переходит из позитивной в негативную [1], [5], [6] и функция $f(v, y)$ становится невозрастающей (иногда убывающей) в этой области по переменной v. Относительно характера зависимости по переменной y можно высказать предположение об убывающем приросте, что связано с насыщением рынка, с производственными ограничениями. Последнее позволяет потребовать свойство вогнутости функции $f(v, y)$ по переменной y.

Исходя из эконометрического анализа зависимости текущих продаж от накопленных рекламных воздействий и накопленной репутации фирмы [1], [5], [6] можно сделать некоторые предположения относительно вида функций G_u :

– в ретроспективе реклама вызывает увеличение спроса до какого-то определенного момента времени τ_u^*, после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет;

– исключается возможность проявления антирекламы, т.е. рекламные затраты фирмы не вызывают снижение спроса на товар.

Таким образом, функция G_u неотрицательна, имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат. Если при этом функция дифференцируема, то предположения эквивалентны следующей группе условий:

$$G_u(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \to +\infty} G_u(\tau) = 0;$$

$$G'_u(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_u^*); G'_u(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_u^*; +\infty).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть влияние предыдущих продаж на текущие продажи, приняв следующие условия относительно функциии G_x :

– потребитель, приобретя товар (воспользовавшись услугой) в данной фирме, может пожелать снова приобрести товары этой фирмы (то, как быстро он вернется за очередной покупкой, зависит от специфики товара, срока службы и т.д.);

– как правило, опыт первых покупок со временем забывается, уступая место недавнему опыту;

– в отличие от рекламы, которая позиционирует товар только с положительной стороны и подогревает интерес к товару на начальном этапе, собственный опыт потребителей не однозначен: в одном случае клиенты могут отказаться от дальнейших покупок товара после первого приобретения, тогда функция G_x изначально монотонно убывает; в другом случае они могут обеспечивать до какого-то момента τ_x^* увеличивающийся приток новых покупок до насыщения, после чего происходит спад, в этом случае функция G_x имеет точку глобального максимума, которой соответствует наибольшая отдача от прошлых продаж.

Таким образом, функция G_x будет удовлетворять следующим условиями:

$$G_x(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \to +\infty} G_x(\tau) = 0;$$

$$G'_x(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_x^*); G'_x(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_x^*; +\infty).$$

При этом, может иметь место условие: момент максимальной отдачи в ретроспективе $\tau_x^* = 0$.

Финансовым результатом хозяйственной деятельности любой фирмы является прибыль или убыток. Очевидно, что в каждый момент времени t прибыль π определяется стандартным условием $\pi(x(t), u(t)) = x(t) - c(x(t), t)$, где с - затраты, связанные с получением выручки x, в момент t. Функция $c(x, t)$ - включает в себя постоянные издержки, в общем случае определяемые временным трендом, и переменные издержки, связанные с выпуском продукции (предоставлением услуг). Рекламные расходы u с точки зрения бухгалтерского учета являются издержками и должны входить в затраты фирмы, но с экономической точки зрения реклама стимулирует спрос, тем самым увеличивает выручку x.

Таким образом, функционал $\Pi(x(\cdot), u(\cdot))$, представляющий собой суммарную прибыль на временном интервале планирования $[0, T]$, определяется:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(x(t), u(t))dt = \int_0^T \left(f(y(t), v(t)) - u(t) - c_1(x(t), t)\right) dt.$$

Здесь $c_1(x, t)$ включает в себя постоянные издержки и издержки, связанные с выручкой (выпуском) x без учета рекламных издержек. Заметим, что в большинстве случаев, включающих в анализ факторы прибыли и издержек, переменные издержки рассматриваются прямо пропорциональными выпуску, чаще всего с постоянным коэффициентом. В этом случае функционал прибыли может рассматриваться в виде

$$\Pi(T) = \int_0^T \left((1-\mu) f\left(y(t), v(t)\right) - u(t)\right) dt, \tag{2.4}$$

где μ – норма издержек на единицу выпуска.

Фирмы по разному подходят к определению рекламного бюджета [2], однако затраты на рекламу, если планируются расходы на определенный временной промежуток, практически всегда имеют пороговое значение. Можно выделить наиболее типичный вариант ограничений фирмы по распределению рекламного бюджета – фиксированная сумма рекламного бюджета в единицу времени:

$$0 \le u(t) \le b,\ t \in [0; T]; \tag{2.5}$$

Основная задача фирмы – максимизировать прибыль при наличии тех или иных ограничений. Предположим, что при $t \le 0$ известна функция дохода $\hat{x}(t)$ и функция рекламных издержек $\hat{u}(t)$. Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную динамическую задачу: максимизировать функционал (2.4) при ограничениях на рекламный бюджет (2.5) и интегральном уравнении (2.3) с условиями (2.1), (2.2).

3. Принцип максимума

Сведем проблему (2.1)-(2.5) к задаче оптимального управления с интегральными уравнениями в виде системы уравнений типа Вольтерра. Введем функции $\phi_u(t)$, $\phi_x(t)$:

$$\phi_u(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_{1u}}^{t-\tau_{0u}} G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & 0 \le t \le \tau_{0u}, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_{1u}}^{0} G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & \tau_{0u} \le t \le \tau_{1u}, \\ 0, & \tau_{1u} \le t; \end{cases}$$

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_{1x}}^{t-\tau_{0x}} G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & 0 \le t \le \tau_{0x}, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_{1x}}^{0} G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & \tau_{0x} \le t \le \tau_{1x}, \\ 0, & \tau_{1x} \le t; \end{cases}$$

а также функции $\bar{G}_x(t-s)$, $\bar{G}_u(t-s)$:

$$\bar{G}_x(t-s) = \begin{cases} G_x(t-s), & \tau_{0x} \le t \le \tau_{1x}, & 0 \le s \le t-\tau_{0x}, \\ G_x(t-s), & \tau_{1x} \le t, & t-\tau_{0x} \le s \le t, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\bar{G}_u(t-s) = \begin{cases} G_u(t-s), & \tau_{0u} \le t \le \tau_{1u}, \quad 0 \le s \le t - \tau_{0u}, \\ G_u(t-s), & \tau_{1u} \le t, \qquad t - \tau_{0u} \le s \le t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя введенные функции, накопленные репутация фирмы, рекламное воздействие, прибыль можно представить в виде:

$$y(t) = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)x(s)ds = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)f(y(s), v(s))ds, \tag{3.1}$$

$$v(t) = \phi_u(t) + \int_0^t \bar{G}_u(t-s)u(s)ds, \tag{3.2}$$

$$\Pi(t) = \int_0^t ((1-\mu)f(y(s), v(s)) - u(s))ds. \tag{3.3}$$

Задача максимизации $\Pi(T)$ при условиях (3.1), (3.2), (3.3) эквивалентна задаче максимизации (2.4) при условиях (2.5), (2.3), (2.1), (2.2) и представляет собой задачу оптимального управления с интегральными уравнениями Вольтерра. Применим для данной задачи принцип максимума Понтрягина [7].

Введем модифицированную функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\begin{aligned} H(s, y, v, u) = \ & (1-\mu)f(y, v) - u + p_y(s)\bar{G}_x(0)f(y, v) + p_v(s)\bar{G}_u(0)u + \\ & \int_s^T \left(p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} f(y, v) + p_v(t)\frac{\partial \bar{G}_u(t-s)}{\partial t} u \right) dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Так как функция Гамильтона-Понтрягина (3.4) является линейной по переменной u, то максимум функции достигается на границе ограничений управления, и имеет смысл рассмотреть множитель h при переменной u, который можно назвать функцией переключения управления. Функция переключения $h(s)$ определяет релейный характер управления и на основе знака этой функции можно для фирмы рассчитать оптимальные вложения в рекламу. Вид функции $h(s)$ определяется соотношением:

$$h(s) = p_v(s)\bar{G}_u(0) - 1 + \int_s^T \left(p_v(t)\frac{\partial \bar{G}_u(t-s)}{\partial t} \right) dt. \tag{3.5}$$

В этом случае оптимальное управление находится из условия

$$u(s) = \begin{cases} b, & h(s) > 0, \\ 0, & h(s) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для определения оптимальной рекламной стратегии необходимо найти сопряженную функцию $p_v(s)$. Следуя [7], составим систему уравнений для нахождения сопряженных переменных p_v, p_y :

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial f(y(s), v(s))}{\partial y} \left(1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left(p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_y(T) = 0, \tag{3.6}$$

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial f(y(s), v(s))}{\partial v} \left(1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left(p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_v(T) = 0. \tag{3.7}$$

Таким образом, для определения оптимальной стратегии рекламных расходов необходимо решить краевую задачу (3.6), (3.7), (3.1), (3.2) с начальными уловиями $y(0) = \phi_x(0)$, $v(0) = \phi_u(0)$. Решение данной краевой задачи представляет из себя довольно сложную проблему, так как в общем случае система не имеет аналитического решения и требуется применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений.

Также к задаче максимизации $\Pi(T)$ при условиях (3.1), (3.2), (3.3) можно применять метод параметризации, расширенный на данный класс задач в работах [8], [9].

Отдельный интерес представляет случай, когда функция $f(y,v)$ линейна по переменным, т.е. $f(y,v)=\alpha_1 y+\alpha_2 v$. Тогда система интегральных уравнений (3.6), (3.7) не зависит от решений системы (3.1), (3.2) и сопряженные переменные для оптимальной стратегии могут быть найдены непосредственно из системы

$$\dot{p}_y = -\alpha_1\left(1-\mu+p_y(s)\bar{G}_x(0)+\int_s^T\left(p_y(t)\frac{\partial\bar{G}_x(t-s)}{\partial t}\right)dt\right),\quad p_y(T)=0,$$

$$\dot{p}_v = -\alpha_2\left(1-\mu+p_y(s)\bar{G}_x(0)+\int_s^T\left(p_y(t)\frac{\partial\bar{G}_x(t-s)}{\partial t}\right)dt\right),\quad p_v(T)=0.$$

И в этом случае оптимальная стратегия $u(s)$ определяется после подстановки решения $p_v(s)$ в функцию переключния $h(s)$.

4. Вычислительный эксперимент

Для тестирования предлагаемой модели были взяты статистические данные компании ОАО "Мегафон": поквартальные данные по продажам $x(t)$ и рекламным затратам $u(t)$ за период с 30 июня 2004 г. по 30 сентября 2013 г. в млн. рублей.

На первом этапе для выявления статистической связи между факторами и определения лагов запаздывания проводился корреляционный анализ. Степень тесноты статистической связи определялась между $x(t)$ и $u(t-\tau)$, а также $x(t)$ и $x(t-\tau)$, $\tau=0,1,2,\ldots$. Расчеты коэффициентов корреляции Пирсона и автокорреляции показали сильную линейную связь между $x(t)$ и $x(t-1)$, $x(t-2)$, $u(t)$, $u(t-1)$, $u(t-2)$. Соответствующие выборочные значения представлены в табл.1.

Таблица 1. *Выборочные коэффициенты корреляции Пирсона и автокорреляции*

τ	0	1	2
$corr(x(t),x(t-\tau))$	1	0,92	0,73
$corr(x(t),u(t-\tau))$	0,83	0,79	0,62

Из табл.1 видно, что статистические связи между рекламой и продажами, а также между текущими и предыдущими продажами ослабевают по мере увеличения величины лага, что соответствует ранее сделанным предположениям. В ходе проверки значимости параметров связи по t-критерию Стьюдента с вероятностью ошибки 3% была отвергнута гипотеза о том, что при нормальном распределении связь выручки и рекламных затрат отсутствует. С вероятностью существенно меньшей процента, - что отсутствует связь между выручкой и предыдущими продажами. Таким образом, исходя из анализа существенности связи, были определены начальные ($\tau_{0u}=0$, $\tau_{0x}=1$) и конечные ($\tau_{1u}=2$, $\tau_{1x}=2$) лаги запаздывания.

На следующем этапе было сделано предположение о линейном виде правой части в соотношении (2.3):

$$x(t)=\alpha_1 y(t)+\alpha_2 v(t)=\alpha_1\int_1^2 G_x(\tau)x(t-\tau)d\tau+\alpha_2\int_0^2 G_u(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Анализ линейной дискретной (по лагам запаздывания) регрессионной модели показал, что отдача от рекламного воздействия со временем убывает, т.е. реакция на рекламу принимает максимальное значение практически сразу после выхода рекламного сообщения и оказывает меньшее влияние на последующие продажи. Также монотонно убывающим является влияние предыдущих продаж, т.е. воздействие максимальная отдача от предыдущих продаж приходится на первый лаг, а затем с течением времени оказывается все меньшее воздействие на потребителя. Таким образом, учитывая сделанные выше предположения относительно функций $G_u(\tau)$ и $G_x(\tau)$, выберем параметрическое представление этих функций в виде:

$$G_u(\tau) = g_{1u} \exp\left(g_{2u}\tau\right), \quad G_x(\tau) = g_{1x} \exp\left(g_{2x}\tau\right).$$

На основе предположений и результатов регрессионного анализа, интегральное уравнение (2.3) было преобразовано:

$$x(t) = \int_1^2 \tilde{g}_{1u} \exp\left(g_{2u}\tau\right) x(t-\tau)d\tau + \int_0^2 \tilde{g}_{1x} \exp\left(g_{2x}\tau\right) u(t-\tau)d\tau.$$

Параметры модели $\tilde{g}_{1u}, \ g_{2u}, \ \tilde{g}_{1x}, \ g_{2x}$ определялись методами регрессионного анализа по статистике ОАО "Мегафон"(оценки обозначим $\hat{g}_{1u}, \ \hat{g}_{2u}, \ \hat{g}_{1x}, \ \hat{g}_{2x}$), в результате уравнение текущих продаж для компании ОАО "Мегафон"приняло вид

$$x(t) = \int_1^2 3,04953 \exp\left(-0,9672\tau\right) x(t-\tau)d\tau + \int_0^2 2,87153 \exp\left(-7,87152\tau\right) u(t-\tau)d\tau.$$

Также исходя из значений статистических данных, были определены функции $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ как результат точечной аппроксимации:

$$\hat{x}(t) = 1,472t + 68,45, \quad \hat{u}(t) = -0,09t + 2,06.$$

Принимая во внимание, что компания ОАО "Мегафон"является непроизводственной компанией, дополнительные издержки, связанные с увеличением объема услуг, представляют относительно небольшую величину. Это позволяет в функционале (2.4) положить $\mu = 0$.

Полученная модель в дальнейшем анализировалась на основе численных схем при $T = 4$ (планирование на год) и $b = 2,4$ (ограничение на бюджет). В частности, в решении задачи Коши для прямой задачи и для сопряженных переменных использовался численный метод решения интегро-диффренциальных уравнений, основанный на вычислительной схеме Эйлера. При этом интеграл, находящийся в правой части интегро-дифференциального уравнения вычислялся методом трапеций.

Численный анализ проводился с различными шагами дискретизации временного параметра. Во всех случаях решение задачи приводило к следующей структуре оптимального управления:

$$u(t) = \begin{cases} 2,4, & 0 \le t < \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases}$$

Ниже в табл. 2 приведены результаты расчетов при оцененных значениях параметров $\hat{g}_{1u} = 2,87153, \ \hat{g}_{2u} = -7,87152, \ \hat{g}_{1x} = 3,04953, \ \hat{g}_{2x} = -0,9672$.

Таблица 2. *Результаты решения при различных шагах дискретизации*

шаг дискретизации	суммарная прибыль	τ
0,001	640,119	3,57
0,0005	640,136	3,64
0,00025	640,142	3,70
0,000125	640,143	3,74

Решения, приведенные в табл. 2, подтверждают эмпирическое представление об оптимальной стратегии рекламных вложений: на первоначальном этапе производится максимальное вложение в рекламу, а в конце периода планирования финансирование рекламных расходов прекращается.

Для проверки устойчивости полученного результата модели были проведены вариации параметров: каждый из найденных параметров $\hat{g}_{1u}$, $\hat{g}_{2u}$, $\hat{g}_{1x}$, $\hat{g}_{2x}$ варьировался на 10% в сторону уменьшения и увеличения, а затем находилось оптимальное решение при этих значениях параметров.

Ниже в табл.3 приведены решения при различных значениях параметров и фиксированном шаге дискретизации 0,000125.

Таблица 3. *Результаты решения при различных параметрах*

$\tilde{g}_{1u}$	g_{2u}	$\tilde{g}_{1x}$	g_{2x}	суммарная прибыль	τ
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,143	3,742
$1,1\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,410	3,742
$0,9\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	639,876	3,742
$\hat{g}_{1u}$	$1,1\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,184	3,738
$\hat{g}_{1u}$	$0,9\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	639,870	3,745
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$1,1\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	700,438	3,748
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$0,9\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	586.203	3,736
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$1,1\hat{g}_{2x}$	731,984	3,740
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$0,9\hat{g}_{2x}$	571,539	3,743

Из табл. 3 следует, что вариация параметров несильно изменяет момент переключения управления, что позволяет достаточно устойчиво давать оценку оптимального управления. Также анализ табл. 3 позволяет сделать вывод, что наиболее существенно на модельное значение прибыли влияют оценки параметров функции $G_x(\cdot)$, это означает, что эконометрическое оценивание параметров этой функции следует проводить более тщательно.

Таким образом, проведенный численный анализ показал, что предлагаемая модель может быть применима для формирования эффективной стратегии управления рекламными расходами.

Список литературы

1. Лутошкин И. В, "Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий", *Прикладная эконометрика*, **19**:3 (2010), 101–111.

2. Берндт Э. Р., *Практика эконометрики: классика и современность: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям 060000 экономики и управления/ Пер. с англ. под ред. проф. С.А. Айвазяна/ Э.Р.Берндт*, ЮНИТИ-ДИАНА, М., 2005.

3. Jian Huang, Mingming Ltng, Liping Liang, "Recent Developments in Dynamic Advertising Research", *European Journal of Operational Research*, **220**:3 (2012), 591–609.

4. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н., *Оптимальное импульсное управление с приложениями*, Физматлит, М., 2000.

5. Лутошкин И. В, Ямалтдинова Н. Р., “Инновационные технологии управления на основе динамического моделирования рекламного бюджета”, Труды 5-й всеросс. научно-практ. конф. с международным участием "Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования" (Ульяновск, 2014), 43–46.

6. Лутошкин И. В, Ямалтдинова Н. Р., “Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания”, Сборник трудов 4-й Международной научно-практ. конф. "Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании" (Тверь, 2015), 84–89.

7. Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П., “Необходимые условия слабого минимума в задачах с интегральными уравнениями”, Труды 12 всероссийского совещания по проблемам управления (Москва, 2014), 709–713.

8. Лутошкин И. В, Дергунов И. Е., “Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **12**:4 (2010), 116–126.

9. Лутошкин И. В, “Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации”, *Известия ИГУ. Сер. "Математика"*, **4**:1 (2011), 44–56.

The maximum principle to the control problem of advertising expenses with distributed lag

© **I. Lutoshkin,**[3] **N. Yamaltdinova**[4]

Abstract. There is constructed the dynamic optimal control problem of promotion expenses, taking into account distributed lags of advertising and accumulated firm goodwill. There is solved the problem of maximizing a total profit of a company for the planning period under the restriction, reflects the reaction of the target audience. In this case initial problem is formulated as a system of equations of Volterra type.

Key Words: promotion expenses control; model with distributed lag of advertising; accumulated firm goodwill; optimal control; integral equations of Volterra type

[3] Head of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; lutoshkiniv@ulsu.ru.

[4] Graduate student of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk