

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.63:517.958

К вопросу математического моделирования процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями© А. Р. Нафикова¹, В. Н. Кризский²

Аннотация. В работе исследуется математическая модель задачи переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Приводится сравнительное сопоставление результатов компьютерного моделирования с известными моделями для случая однородных кусочно-постоянных сред. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

Ключевые слова: диффузия-адвекция радона, анизотропная среда, краевая задача

1. Введение

Процессы тепломассопереноса описываются краевыми задачами математической физики параболического типа. Проблема переноса вещества в диффундирующих слоистых средах является предметом исследований как теоретиков, так и практиков различных областей: медицины, экологии, геологии и геофизики.

Так, в области медицины актуальны задачи достижения необходимых для лечения концентраций медицинских препаратов в тканях человека, имеющих, как правило, слоистую структуру, в необходимые интервалы времени. Известные математические модели переноса лекарственных препаратов при поверхностном или внутримышечном воздействиях имеют вид одномерной краевой задачи в кусочно-однородных слоистых средах. Но используемые модели не учитывают анизотропию диффузионных свойств тканей (например, мышечных) или возможные локальные образования измененных тканей (например, онкологических опухолей).

В области геологии и геофизики актуальными являются задачи переноса радона и дочерних продуктов его распада, измерений параметров радоновых полей, результаты которых используются при поисках месторождений радиоактивных и углеводородных ископаемых, геологическом картировании, прогнозе горных ударов и тектонических землетрясений, экологической оценке мест под строительство зданий и сооружений, оценке санитарного состояния помещений.

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения радона – актуальная задача, имеющая практическое значение.

¹ Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

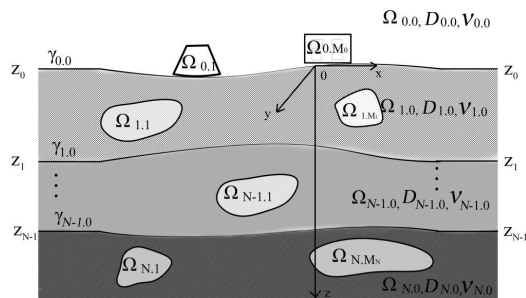
² Профессор кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.

В настоящей работе рассматривается новая математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона, учитывающая анизотропию диффузионных свойств геологической среды и геометрию локальных включений.

2. Постановка задачи и способ решения

Пусть среда (рис. 2.1) разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i = const \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$ ($i = \overline{0, N}$) на горизонтальные слои $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которых описываются постоянными симметричными тензорами $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i,0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i,j} (j = \overline{1, M_i})$ с гладкими границами $\gamma_{i,j}$, заполненных веществом, физические свойства которых описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$.



Р и с у н о к 2.1

Горизонтально-слоистая среда с включениями

Математическая модель переноса радона в области исследования $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^{M_i} \Omega_{i,j} \subset R^3$ может быть представлена начально-краевой задачей для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial t} = \text{div}(D_{i,j} \nabla A_{i,j}(P,t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P,t) - A_{i,\infty}), \tag{2.1}$$

$$P = P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i,0} \nabla A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = \tag{2.2}$$

$$= ((D_{i+1,0} \nabla A_{i+1,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \tag{2.3}$$

$$((D_{i,j} \nabla A_{i,j}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P,t))|_{\gamma_{i,j}} = \tag{2.4}$$

$$= ((D_{i,0} \nabla A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$A_{i,j}(P,t)|_{\gamma_{i,j}} = A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P, t) = A_{N,\infty}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P, t) = 0; \quad (2.7)$$

$$\lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P, t) = A_i(P, t), \quad i = \overline{0, N}; \quad (2.8)$$

$$A_{i,j}(P, 0) = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M_i}. \quad (2.9)$$

Здесь $A_{i,j}(P, t)$ – функция объемной активности радона (ОАР) в грунте, $A_{i,j}(P, t) \in C_P^2(\Omega) \cap C_P^1(\gamma_{i,j}) \cap C_t^1(\Omega)$; λ – постоянная распада радона; $A_{i,\infty}$ – ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) в грунте i -го слоя, которая равна $A_{i,\infty} = K_{i,em} A_{i,Ra} \rho_{i,s} (1 - \eta_i)$, $K_{i,em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i,Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra , $\rho_{i,s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_i(P, t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

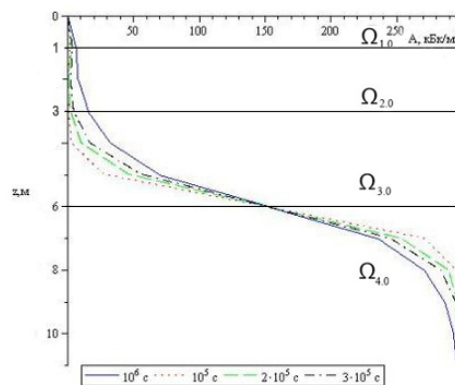
Если область $\Omega_{0,0}$ – приземный слой атмосферы, то в задаче (2.1) – (2.8) следует положить $A_{0,\infty} = 0$. При $M_0 > 0$ включения $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$ могут описывать жилые и производственные сооружения.

В работе [1] описан способ решения задачи (2.1) – (2.8) на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Для его реализации разработан программный комплекс расчета поля ОАР средствами компьютерной системы Maple. С помощью программного комплекса произведены численные расчеты с целью проверки правильности построенной модели и предложенного алгоритма, анализа влияния параметров сред на распределение поля радона.

3. Сравнительное сопоставление для случая однородных сред

В соответствии с работой [2], проведен вычислительный эксперимент с диффузионно-адвективной моделью переноса радона для пятислойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами со следующими значениями ее параметров: $n = 5$; $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$; $z_0 = 0 \text{ м}$, $z_1 = 1 \text{ м}$, $z_2 = 3 \text{ м}$, $z_3 = 6 \text{ м}$; $d_{0,0} = 1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$, $d_{1,0} = d_{2,0} = d_{3,0} = d_{4,0} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $v_{0,0} = 0 \text{ м/с}$, $v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = v_{4,0} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$; $\rho_{1,s} = \rho_{2,s} = \rho_{3,s} = \rho_{4,s} = 2700 \text{ кг/м}^3$; $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.45$; $K_{1,em} = K_{2,em} = K_{3,em} = K_{4,em} = 0.2$; $A_{1,Ra} = 90 \text{ Бк/кг}$, $A_{2,Ra} = 4 \text{ Бк/кг}$, $A_{3,Ra} = 30 \text{ Бк/кг}$, $A_{4,Ra} = 1000 \text{ Бк/кг}$.

Сравнительный анализ результатов на вертикальном профиле $(2, 2, z)$, $z \in [0, 10]$, соответствующих моменту времени $t = 10^6 \text{ с}$, приведен в табл. 1, где: z – глубина, м; A_{gr} – значения ОАР [2], кБк/м³; A_{num} – значения ОАР, найденные по разработанным алгоритмам, кБк/м³; Δ – абсолютная погрешность, %; δ – относительная погрешность, %.



Р и с у н о к 3.1

Кривые распределения ОАР в различные моменты времени t

z, м	A_{gr} , кБк/м ³	A_{num} , кБк/м ³	Δ , %	δ , %
1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0001	0.01	–
1	2.3629	2.2798	8.31	3.52
2	0.4401	0.4465	0.64	1.45
3	0.9790	0.9736	0.54	0.55
4	2.8929	2.8628	3.01	1.04
5	27.6425	27.3560	28.65	1.04
6	149.4550	149.3438	11.12	0.07
7	271.0907	271.3304	23.97	0.09
8	295.2742	295.7716	49.74	0.17
9	297.1825	296.9868	19.57	0.07
10	297.2752	297.0000	27.52	0.09

Р и с у н о к 3.2

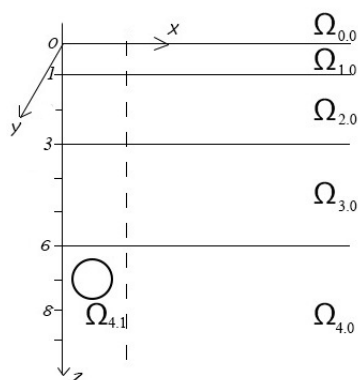
Сравнительный анализ результатов для $t = 10^6$ с

Данные табл. 1 показывают, что максимальная относительная погрешность не превосходит 4%. На рис. 3.1 показана динамика распределения ОАР в различные моменты времени t : 10^5 с; $2 \cdot 10^5$ с; $3 \cdot 10^5$ с; 10^6 с.

4. Перенос радона. Анизотропный случай

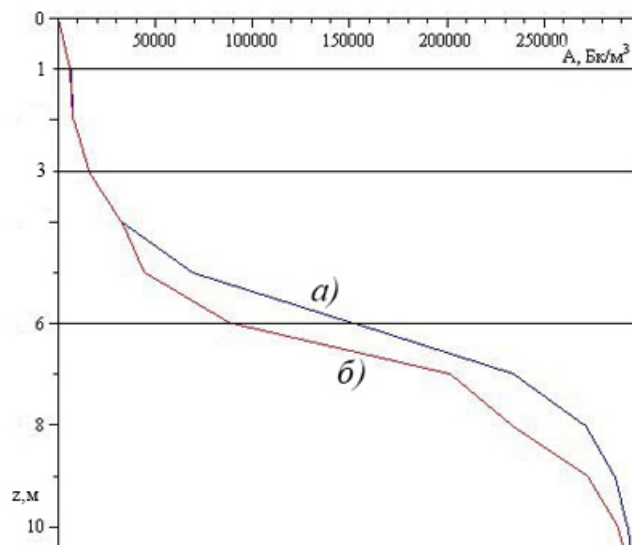
Проведены численные расчеты функции распределения ОАР в кусочно-однородной плоско-параллельной горизонтально-слоистой среде с шарообразным включением $\Omega_{4.1}$ радиуса $R = 0.5$ м с центром в точке $(1, 1, 7)$ (рис. 4.1). Значения параметров среды соответствуют представленным выше. Физические свойства включения заданы симметричным тензором диффузии $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$ и скоростью адвекции $v_{4.1} = 4 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Результаты численного моделирования по вертикальному профилю $(2, 2, z)$, $z \in [0, 11]$ приведены на рис. 4.2. На рис. 4.2 (а) изображен график функции нормального поля радона (без учета включений) при $t = 10^6$ с. Влияние включения на ОАР отражено на рис. 4.2 (б).



Р и с у н о к 4.1

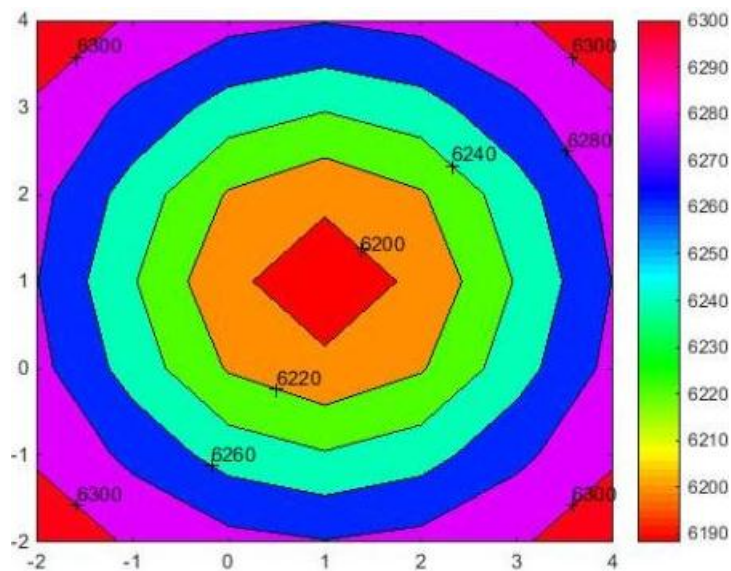
Геометрия среды



Р и с у н о к 4.2

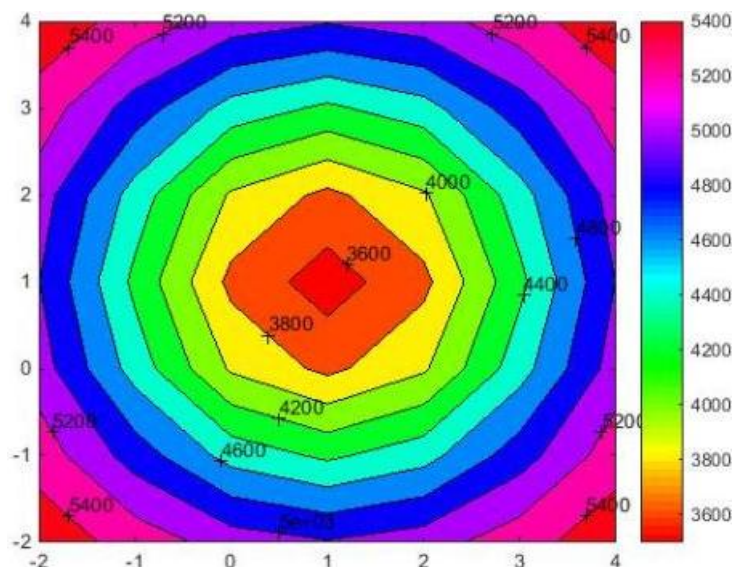
График функции ОАР

Для среды, геометрия которой представлена на рис. 4.1, показана зависимость ОАР от радиуса R шарообразного включения $\Omega_{4,1}$: $R = 0.5$ м и $R = 1.5$ м с центром в точке $(1, 1, 8)$ (рис. 4.4).



Р и с у н о к 4.3

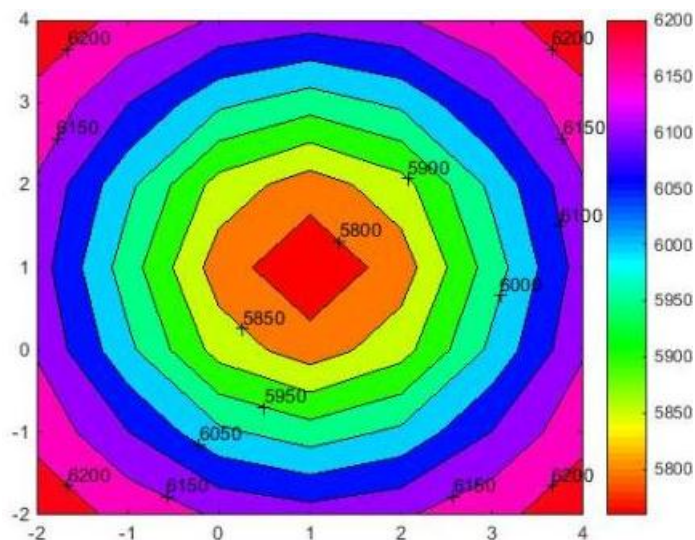
Зависимость объемной активности радона от радиуса включения



Р и с у н о к 4.4

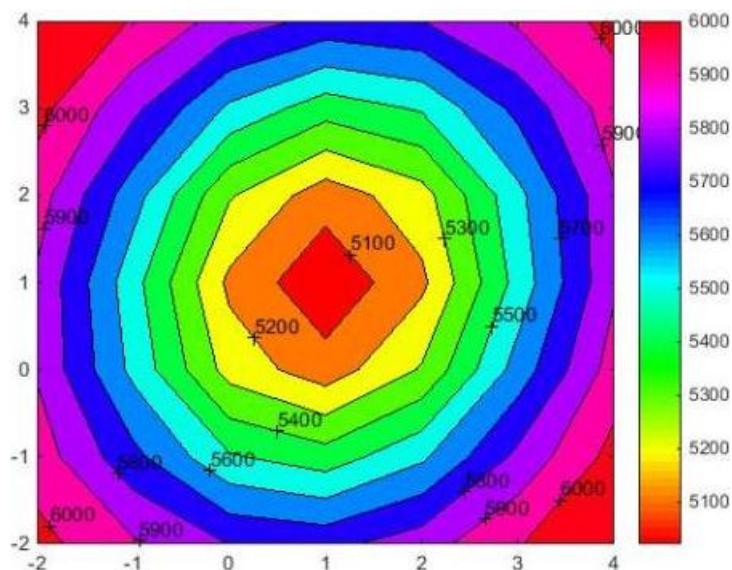
Зависимость объемной активности радона от радиуса включения

На рис. 4.6 (а) показан график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях, в прямоугольнике $x, y \in [-2; 4]$, в плоскости $z = 1$ м. В случае анизотропного шарообразного включения $\Omega_{4.1}$, диффузионные свойства которого описываются тензором $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 10^{-5} & 0 \\ 10^{-5} & 5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$, график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях имеет вид (рис. 4.6 (б)).



Р и с у н о к 4.5

а) однородное включение



Р и с у н о к 4.6

б) анизотропное включение

Учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели поля в реальных геологических средах.

5. Заключение

Проведены сравнения с известными моделями для случая однородных кусочно-постоянных сред и вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кризский В.Н., Нафикова А.Р., “Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями”, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование*, **7:2** (2014), 38–45.
2. Яковлева В.С., Паровик Р.И., “Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1(2), 45–55.

To a question of mathematical modeling of processes of transfer of radon in piecewise and anisotropic layered media with inclusions

© A. R. Nafikova³, V. N. Krizsky⁴

Abstract. In work the mathematical model of a problem of transfer of radon in piecewise and constant anisotropic layered media with inclusions is investigated. Comparative comparison of results of computer modeling to known models for a case of uniform piecewise and constant media is given. Results of computing experiments on research of processes of transfer of radon in piecewise and constant anisotropic layered media are discussed with inclusions and to mutual influence of parameters of mathematical model.

Key Words: diffusion and advection of radon, anisotropic media, boundary problem.

³Senior lecturer of chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

⁴Professor of chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.