УДК 517.9

Об одном классе локально приводимых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов

© П. А. Шаманаев [1]

Аннотация. В статье получено расширение класса локально приводимых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов к линейным системам с постоянной матрицей. Метод доказательства основан на построении нелинейного ляпуновского преобразования, связывающего соответствующие решения линейной и нелинейной систем. Доказательство существования нелинейного ляпуновского преобразования основано на применении теоремы о неподвижной точки оператора, в частности принципа сжимающих отображений. Используя полученные в статье достаточные условия продолжимости решений вправо на бесконечный полуинтервал и влево на конечный интервал, а так же оценки норм решений нелинейных систем, показано, что нелинейный оператор, на основе которого построено нелинейное ляпуновское преобразование является оператором сжатия. Рассмотрен пример нелинейного дифференциального уравнения, для которого достаточные условия локальной приводимости являются необходимыми.
Ключевые слова: локальная приводимость, нелинейные ляпуновские преобразования, нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, оператор сжатия, неподвижная точка оператора, продолжимость решений.

1. Введение

Для линейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости введено в знаменитой работе А.М.Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения"[1]. В случае нелинейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости будем понимать в смысле определения Е.В.Воскресенского, приведенного в работе [2].

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(t,x)$ такая, что

$$f \in \mathbb{C}^{(k,l)}(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 0,\ l \geq 1,\ \mathcal{T} = [T, +\infty),\ f(t,0) \equiv 0. \tag{1.2}$$

Не ограничивая общности будем считать $T \geq 0$.

Предположим, что у систем вида (1.1) существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq T$, причем эти решения заполняют некоторую область D пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$D = \Big\{(t,x)\ :\ t \in \mathcal{T},\ x \in X_t,\ X_t \subseteq \mathbb{R}^n\Big\},$$

где $X_t\ (t \in \mathcal{T})$ – области, содержащие окрестность нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset X_t$ при всех $t \in \mathcal{T}$.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru

Если у системы вида (1.1) решения $x(t:t_0,x_0)$, где $(t_0,x_0)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$, определены при всех $t\geq T$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом $\boldsymbol{\Xi}$ [2], [3].

Если же у системы вида (1.1) существует совокупность решений $x(t:t_0,x_0)$, определенных при всех $t\geq T$, лишь только при $(t_0,x_0)\in D$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом $\boldsymbol{\Omega}$.

Очевидно, что если $X_t=\mathbb{R}^n$ при всех $t\in\mathcal{T}$, то в этом случае $D=\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$. Откуда следует, что для любых $(t_0,x_0)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$ все решения систем из множества $\boldsymbol{\Omega}$ определены при всех $t\geq T$. Следовательно, множества $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Xi}$ систем дифференциальных уравнений совпадают. В общем случае $\boldsymbol{\Xi}\subseteq\boldsymbol{\Omega}$.

Рассмотрим преобразование $x=\varphi(t,y)$ из ляпуновской группы $(\mathbf{LG},\boldsymbol{\Xi})$ (см. [2]) на множестве $\boldsymbol{\Omega}$. При каждом фиксированном $t\in\mathcal{T}$ это преобразование представляет собой взаимно однозначное отображение

$$x=\varphi_t(y),\quad x,\,y\in\mathbb{R}^n.$$

Так как отображение φ_t является взаимно однозначным отображением пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, то

$$x=\varphi_t(y),\quad y\in V_t,\quad x\in U_t=\varphi_t\big(V_t\big),\tag{1.3}$$

(где $V_t\subset\mathbb{R}^n$ – область, содержащая окрестность нуля) также является взаимно однозначным отображением области V_t на область U_t.

В работе [9] введено определение локальной приводимости систем дифференциальных уравнений. Дополним его следующим образом

О п р е д е л е н и е 1.1. *Две системы из множества $\boldsymbol{\Omega}$ назовем локально приводимыми, если существует преобразование $\varphi\in(\mathbf{LG},\boldsymbol{\Xi})$ такое, что при каждом фиксированном $t\in\mathcal{T}$ диффеоморфизм*

$$\varphi_t:V_t\mapsto U_t,\tag{1.4}$$

(здесь, $X_t\supset V_t$, U_t – области, содержащие окрестности нуля, причем существует шар $S_p\subset\mathbb{R}^n$ фиксированного радиуса $p>0$, такой, что $S_p\subset V_t,\ U_t$ при всех $t\in\mathcal{T}$), переводит точки $y\in V_t$, принадлежащие решениям одной системы, в соответствующие точки $x\in U_t$ другой системы.

З а м е ч а н и е 1.1. *Пусть $X_t=\mathbb{R}^n$ при всех $t\in\mathcal{T}$, и кроме этого, V_t и U_t при всех $t\in\mathcal{T}$ также совпадают со всем пространством $\mathbb{R}^n$ Тогда, если две системы дифференциальных уравнений являются локально приводимыми согласно определению (1.1.), то, все решения одной системы переводятся преобразованием $\varphi\in(\mathbf{LG},\boldsymbol{\Xi})$ в решения другой системы, а это означает, что эти системы являются приводимыми в смысле работ* [2], [3].

З а м е ч а н и е 1.2. *Если $\boldsymbol{\Omega}$ является множеством всех линейных систем дифференциальных уравнений, то из локальной приводимости двух систем из $\boldsymbol{\Omega}$ следует их приводимость по Ляпунову.*

В работах [4], [5] и [9] получены достаточные условия приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений. Достаточные условия локальной приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений приведены в работах [9], [10]–[14].

2. Постановка задачи о локальной приводимости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений из $\mathbf{\Omega}$ вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t,x), \tag{2.1}$$

где $P(t,x)$ – однородный векторный полином степени $q \geq 1$ относительно x, причем вектор-функция $P(t,x)$ является непрерывной по t ($t \in \mathcal{T}$). Применяя обозначения из работы [6], получим

$$P(t,x) = \begin{pmatrix} P_1^{(q)}(t,x) \\ \dots \\ P_n^{(q)}(t,x) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$P_i^{(q)}(t,x) = \sum_{|p|=q} \psi_p^{(i)}(t) x^p, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{2.3}$$

здесь $x^p = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$, $\psi_p^{(i)}(t) = \psi_{p_1,\dots,p_n}^{(i)}(t)$, $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $p = (p_1,\dots,p_n)$, $p_i \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел.

Предположим, что справедливы оценки

$$|\psi_p^{(i)}(t)| \leq \psi(t) \leq C \quad \forall \ t \geq T, \quad i = 1,\dots,n; \quad |p| = q,$$

где $C \in R$.

Ставится задача о локальной приводимости системы дифференциальных уравнений (2.1) к линейной системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{2.4}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная $(n \times n)$ – матрица.

Введем следующие обозначения: Λ — максимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A; λ — минимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы A; $m_1 + 1$ — максимальный порядок жордановой клетки матрицы A, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна λ; m_2+1 — максимальный порядок жордановой клетки матрицы A, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна Λ.

Пусть $Y(t-s)$ — матрица Коши линейной системы (3.2), нормированная в нуле. Тогда для нее справедливы оценки [7, с.302]

$$||Y(t-s)|| \leq K_1 e^{\Lambda(t-s)} \rho^{m_2}(t-s) \qquad t \geq s, \tag{2.5}$$

$$\|Y(t-s)\| \leq K_2 e^{\lambda(t-s)} \rho^{m_1}(t-s) \qquad t \leq s, \tag{2.6}$$

где K – константа;

$$\rho^\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\,t\,| \ < 1, \\ |\,t\,|^\beta & \text{если} |\,t\,| \geq 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

где β — целое неотрицательное число.

3. Достаточные условия локальной приводимости

Сформулируем достаточные условия, которые позволяют получить более широкий класс систем вида (2.1), обладающие продолжимыми решениями вправо на полуинтервал $[t_0, +\infty)$, по сравнению с условиями леммы 2.1 работы [10].

Л е м м а 3.1. *Пусть при* $\Lambda < 0$ *выполняется условие*

$$|t^{qm_2}\psi(t)| \leq d_1 \quad \forall\, t \geq T, \tag{3.1}$$

а при $\Lambda \geq 0$ *сходится интеграл*

$$\int\limits_T^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda\tau}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

Тогда решения $x(t\!:\!t_0,x_0)$ *системы (2.1), начальные данные которых* $(t_0,x_0) \in D_1$, *где*

$$D_1 = \{(t,v):\ (q-1)K_1||v||^{q-1} \int\limits_t^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda(\tau-t)}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau < 1\}, \tag{3.3}$$

продолжимы вправо при всех $t \geq t_0$, *причем для них справедлива оценка*

$$\|x(t\!:\!t_0,x_0)\| \leq K_{D_1}e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||x_0||, \qquad t \geq t_0. \tag{3.4}$$

где

$$K_{D_1} = \frac{1}{\left[1-(q-1)K_1||v||^{q-1} \displaystyle\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau\right]^{q-1}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1 из работы [10]

Л е м м а 3.2. *Пусть* $0 < \lambda < \Lambda < q\lambda$. *Тогда решения* $x(t:t_0,x_0)$ *системы (2.1), начальные данные которых* $(t_0,x_0) \in D_2$, *где*

$$D_2 = \{(t,v):\ (q-1)K_2||v||^{q-1} \int\limits_T^{t} e^{(q-1)\lambda(\tau-t)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)d\tau < 1\}, \tag{3.5}$$

продолжимы влево при всех $t \leq t_0$, *причем для них справедлива оценка*

$$\|x(t\!:\!t_0,x_0)\| \leq K_{D_2}e^{\lambda(t-t_0)}\rho^{m_1}(t-t_0)||x_0||, \qquad t \leq t_0. \tag{3.6}$$

где

$$K_{D_2} = \frac{1}{\left[1-(q-1)K_2||v||^{q-1} \displaystyle\int\limits_{T}^{t_0} e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)d\tau\right]^{q-1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем решение $x(t:t_0,x_0)$ системы (2.1) в интегральной форме

$$x(t) = Y(t-t_0)x_0 - \int\limits_t^{t_0} Y(t-s)P(s,x(s))ds, \quad t \leq t_0. \tag{3.7}$$

Учитывая оценку (2.6), получим

$$\begin{aligned}\|x(t:t_0,x_0)\| \;&\leq\; K_2 e^{\lambda(t-t_0)}\rho^{m_1}(t-t_0)||x_0|| + \\ &+\; K_2 \int\limits_t^{t_0} e^{\lambda(t-\tau)}\rho^{m_1}(t-\tau)\psi(\tau)\,\|x(\tau:t_0,x_0)\|^q\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Преобразуем неравенство (3.8) следующим образом

$$\|x(t:t_0,x_0)\|\,e^{-\lambda(t-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(t-t_0)} \leq K_2||x_0||+$$

$$+K_2\int\limits_t^{t_0} e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\rho^{qm_1}(\tau-t_0)\psi(\tau)\left[||x(\tau:t_0,x_0)||e^{-\lambda(\tau-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(\tau-t_0)}\right]^q d\tau. \tag{3.9}$$

Вводя вспомогательную функцию

$$\xi(t) = \|x(t:t_0,x_0))\|\,e^{-\lambda(t-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(t-t_0)}, \tag{3.10}$$

и делая замену в неравенстве (3.9), получим

$$\xi(t) \leq K_2||\xi_0|| + K_2\int\limits_t^{t_0} e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)[\xi(\tau)]^q d\tau, \quad t \leq t_0.$$

Далее, проводя рассуждения аналогично доказательству леммы Бихари ([8, с.112]) в случае $t \leq t_0$ и полагая в обозначениях работы [8] $\Phi(u) = u^m$, получим

$$\xi(t) \leq K_{D_2}\xi_0, \quad t \leq t_0.$$

Делая обратную замену по формуле (3.10), получим оценку (3.6). Лемма 3.2. доказана.

В работе [10] приведены достаточные условия локальной приводимости систем (2.1) и (3.2), требующие при $q\Lambda - \lambda < 0$ выполнения условия

$$t^{m_1+q\,m_2}\psi(t) \to 0 \quad t \to +\infty, \tag{3.11}$$

а при $q\Lambda - \lambda \geq 0$ сходимость интеграла

$$\int\limits_T^{+\infty} e^{(q\Lambda-\lambda)s}s^{m_1+qm_2}\psi(s)ds. \tag{3.12}$$

Сформулируем достаточные условия, позволяющие получить более широкий класс локально приводимых систем вида (2.1).

Т е о р е м а 3.1. *Пусть справедливы все условия лемм 3.1. и 3.2. Тогда, для того чтобы системы (2.1) и (3.2) были локально приводимыми достаточно выполнения одного из условий*

1) при $q\Lambda < \lambda \le \Lambda < 0$ *справедлива оценка*

$$|t^{m_1+q\,m_2}\psi(t)| \le C_1 < \frac{\lambda - q\Lambda}{K_2} \quad \forall\ t \ge T, \tag{3.13}$$

2) при $q\Lambda - \lambda \ge 0$ *и* $\Lambda - q\lambda \ge 0$ *сходится интеграл (3.12),*

3) при $0 < \lambda < \Lambda < q\lambda$ *справедлива оценка*

$$|t^{qm_1+m_2}\psi(t)| \le C_2 < \frac{q\lambda - \Lambda}{K_1 C_2} \quad \forall\ t \ge T. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае выполнения условия 2), доказательство проводится аналогично рассуждениям работы [10].

Пусть справедливо условие 1) $q\Lambda < \lambda \le \Lambda < 0$.

Определим вектор-функцию $\varphi_0(s,t,v)$ следующим образом

$$\varphi_0(s,t,v) = \begin{cases} x(s:t,v), & \text{при} \quad ||v|| < R(t) \\ x\left(s:t, \dfrac{v}{||v||}R(t)\right), & \text{при} \quad ||v|| \ge R(t), \end{cases} \tag{3.15}$$

где

$$R(t) = \left[\frac{-\Lambda}{K_1 d_1}\right]^{q-1} e^{\Lambda t}.$$

Из определения множества D_1 в лемме 3.1. следует, что

$$\varphi_0(s,t,v) = x(s:t,v), \qquad \text{если} \quad (t,v) \in D_1. \tag{3.16}$$

Применим принцип линейного включения [7, c.557] к разности решений $x^{(1)}(t:t_0,u)$ и $x^{(2)}(t:t_0,v)$ системы (2.1). Учитывая оценку (3.4), получим

$$\|x^{(1)}(t:t_0,u) - x^{(2)}(t:t_0,v)\| \le K_2 e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||u-v||, \qquad t \ge t_0. \tag{3.17}$$

Тогда вектор-функция $\varphi_0(s,t,v)$, определенная по формуле (3.15), удовлетворяет условию Липшица по переменной v во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ [7, c.555]

$$||\varphi_0(s,t,v) - \varphi_0(s,t,u)|| \le K_2 e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||u-v||, \qquad t \ge t_0, \quad \forall\, u,\, v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.18}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном t рассмотрим оператор

$$\Phi v = -\int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)P(s,\varphi_0(s,t,v))ds, \tag{3.19}$$

где φ_0 – определен по формуле (3.15).

Покажем, что оператор Φ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Пусть u, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие 1) теоремы и (3.18), получим

$$||\Phi u - \Phi v|| \le K_2 e^{(\lambda - q\Lambda)t} \int\limits_t^{+\infty} e^{(q\Lambda-\lambda)s} s^{m_1+qm_2}\psi(s)ds||u-v||.$$

Учитывая оценку (3.13), получим

$$||\Phi u-\Phi v||\leq\theta_1||u-v||,\quad \theta_1=\frac{K_2C_1}{\lambda-q\Lambda}<1,\quad \forall\ u,v\in\mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим случай 3) $0<\lambda\leq\Lambda<q\lambda$.

Определим вектор-функцию $\varphi_0(s,t,v)$ по формуле (3.15), где

$$R(t)=\left(\frac{\lambda}{K_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left[\int\limits_T^t e^{(q-1)\lambda(\tau-t)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)d\tau\right]^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Из определения множества D_2 в лемме 3.2. следует, что

$$\varphi_0(s,t,v)=x(s:t,v),\qquad \text{если}\ \ (t,v)\in D_2.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном t рассмотрим оператор

$$\Phi v=-\int\limits_T^t Y(t-s)P(s,\varphi_0(s,t,v))ds. \tag{3.20}$$

Покажем, что оператор Φ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Пусть u, $v\in\mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие 3) теоремы и (3.18), получим

$$||\Phi u-\Phi v||\leq K_1e^{(\Lambda-q\lambda)t}\int\limits_T^t e^{(q\lambda-\Lambda)s}s^{qm_1+m_2}\psi(s)ds||u-v||.$$

Учитывая оценку (3.14), получим

$$||\Phi u-\Phi v||\leq\theta_2||u-v||,\quad \theta_2=\frac{K_1C_2}{q\lambda-\Lambda}<1,\quad \forall\ u,v\in\mathbb{R}^n.$$

Следовательно, оператор Φ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, оператор Φ переводит $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Так как $\mathbb{R}^n$ — банахово пространство, то все условия теоремы п.10.1 [7, с.506] выполнены, и следовательно, при любом $u\in\mathbb{R}^n$ уравнение

$$v=u+\Phi v \tag{3.21}$$

имеет в $\mathbb{R}^n$ единственное решение и оно может быть получено методом последовательных приближений, начинающихся с любого элемента $v^{(0)}\in\mathbb{R}^n$.

Полагая $L=I-\Phi$, где I — тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, запишем уравнение (3.21) в виде

$$Lv=u.$$

Так как оно имеет единственное решение при любом $u\in\mathbb{R}^n$, то существует [7] обратный оператор L^{-1} такой, что

$$L^{-1}u=v.$$

Положим

$$\varphi(t,v)\equiv Lv\qquad \forall\ t\geq T, \tag{3.22}$$

$$\varphi^{-1}(t,u) \equiv L^{-1}u \qquad \forall\ t \geq T. \tag{3.23}$$

Следовательно, преобразование φ при каждом фиксированном $t \geq T$ является взаимно-однозначным отображением [7], причем

$$\|\varphi(t,u)\| \leq c_1\|u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n, t \geq T.$$

$$\|\varphi^{-1}(t,v)\| \leq c_2\|v\|, \quad v \in \mathbb{R}^n, t \geq T.$$

Кроме этого, преобразования φ и φ^{-1} являются непрерывными по первой и непрерывно-дифференцируемыми по второй переменным [9].

Заметим, что преобразование $y = \varphi(t,x)$ при $(t,x) \in D_1$ в случае 1) и $(t,x) \in D_2$ в случае 3) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями систем (2.1) и (3.2).

Таким образом, преобразования (3.22) и (3.23) удовлетворяют определению 1.1 и является ляпуновскими. Следовательно, системы (2.1) и (3.2) являются локально приводимы. Теорема 3.1 доказана.

4. Пример локально приводимого дифференциального уравнения

Пример 4.1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \psi(t)x^q, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

где $x \in R$, $q \geq 2$, α – вещественный параметр, $\psi(t)$ – скалярная функция, непрерывная по $t \in [0,+\infty)$, $0 < \psi(t) \leq C$ при всех $t \geq 0$, C – константа.

Решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для уравнения (4.1) имеет вид

$$x(t:t_0,x_0) = \frac{x_0\, e^{\alpha\,(t-t_0)}}{\left[1-(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds\right]^{\frac{1}{q-1}}} \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) следует, что существуют как продолжимые, так и непродолжимые решения вправо на полуинтервал $[t_0,+\infty)$. Для того, чтобы решения уравнения (4.1) были продолжимы вправо на полуинтервал $[t_0,+\infty)$, необходимо и достаточно, что бы выполнялось условие

$$1-(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds > 0, \quad \forall\ t \geq t_0. \tag{4.3}$$

Из условия (4.3), следует, что для продолжимости вправо решений при всех $t \geq t_0$, необходимо и достаточно, что бы начальные данные (t_0,x_0) удовлетворяли условию

$$(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds < 1. \tag{4.4}$$

В предположении справедливости условия (4.4), исследуем на локальную приводимость уравнение (4.1) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \tag{4.5}$$

Для этого проверим выполнимость условий леммы 3.1. и теоремы 3.1.

Для уравнения (4.1) найдем $\Lambda = \lambda = \alpha$, $m_1 = m_2 = 0$. Сравнивая условие (4.4) с условиями (3.1), (3.3) и (3.3) леммы 3.1., заключаем, что условия леммы выполняются и являются как достаточными, так и необходимыми, для существования продолжимых решений вправо на полуинтервал $[t_0, +\infty)$ дифференциального уравнения (4.1).

Для проверки условий теоремы рассмотрим отдельно случаи когда $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha < 0$. Этот случай соответствует условию 1) $q\Lambda < \lambda \leq \Lambda < 0$ теоремы, причем оценка (3.13) принимает вид

$$|\psi(t)| \leq C_1 < -(q-1)\alpha \quad \forall\, t \geq T, \tag{4.6}$$

Следовательно, для локальной приводимости дифференциальных уравнений (4.1) и (4.5) достаточно выполнения оценки (4.6).

Пусть $\alpha = 0$. Этот случай соответствует условию 2) $\lambda \leq 0 \leq \Lambda < q\Lambda$ и интеграл (3.12) принимает вид

$$\int\limits_{T}^{+\infty} \psi(s)ds. \tag{4.7}$$

Тогда, для локальной приводимости дифференциальных уравнений (4.1) и (4.5) при всех $q \geq 2$ достаточно сходимости интеграла (4.7).

Пусть $\alpha > 0$. Этот случай так же соответствует условию 2) теоремы и интеграл (3.12) принимает вид

$$\int\limits_{T}^{+\infty} e^{\alpha\,(q-1)s}\psi(s)ds. \tag{4.8}$$

Следовательно, при условии сходимости интеграла (4.8) дифференциальные уравнения (4.1) и (4.5) являются локально приводимыми при всех $q \geq 2$.

Список литературы

1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, ОНТИ, Л.; М., 1935, 336 с.

2. Е. В. Воскресенский, “О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика.*, 1998, № 9, 33–37.

3. Е. В. Воскресенский, “Ляпуновские группы преобразований”, *Изв. вузов. Математика.*, 1994, № 7, 13–19.

4. Е. В. Воскресенский, “Группы преобразований Ляпунова”, *Укр. мат. журн.*, **45**:12 (1993), 1595–1600.

5. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

6. Ю. Н. Бибиков, *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*, Высш. шк., М., 1991, 303 с.

7. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.

8. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.

9. П. А. Шаманаев, *Ляпуновские преобразования и устойчивость движения*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Саранск, 1997, 16 с.

10. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов", *Труды Средневолжского математического общества*, **5**:1 (2003), 145–151.

11. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков", *Труды Средневолжского математического общества*, **6**:1 (2004), 232-237.

12. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов к линейным системам с переменной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **7**:1 (2005), 256-262..

13. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями порядка выше первого к линейным системам с переменной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **8**:1 (2006), 330-336.

14. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов к линейным системам с постоянной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **9**:1 (2007), 259-264.

On a class of locally reducible nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials

© **P. A. Shamanaev**[2]

Abstract. The article received a extension of the class is locally reducible nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials to linear systems with constant matrix. The method of proof is based on constructing a nonlinear Lyapunov transformation, linking the corresponding solutions of linear and nonlinear systems. The proof of the existence of a nonlinear Lyapunov transformation based on the application of the theorem on a fixed point operator, in particular the contraction mapping principle. Using the information in the article sufficient conditions of extendibility decisions right on the endless pollinterval and left on the final interval, as well as estimates for the norms of solutions of nonlinear systems, the author showed that the nonlinear operator based nonlinear Lyapunov transformation is an operator of compression. The article considers the example of a nonlinear differential equation, for which sufficient conditions for local reducibility are necessary.

Key Words: local reducibility, nonlinear Lyapounov transformations, nonlinear systems of ordinary differential equations, compression operator, a fixed point of the operator, extendibility of solutions

[2] Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; korspa@yandex.ru