УДК 517.958

Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области

© **Ж. Ш. Сафаров** [1]

Аннотация. Рассматривается одномерное интегродифференциальное уравнение, которое возникает в теории вязкоупругости с плотностью $\rho = \rho(x)$ и коэффициентами Ламе $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$. Задача изучается в ограниченной по x области $[0, l]$. Начальные условия равны нулю. Граничными условиями являются функция напряжений на левом конце этого отрезка в виде сосредоточенного источника возмущений, а на правом - нуль. Для прямой задачи изучается обратная задача об определении ядра, входящего в интегральный член уравнения, по дополнительной информации о функции смещений при $x = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К этой системе в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение вязкоупругости, ядро интеграла, интегродифференциальное уравнение, дельта-функция, функция напряжений

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение вязкоупругости в ограниченной по переменной x области $D := \{(x, t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{1.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u\mid_{t<0} \equiv 0,\ 0 \le x \le l, \tag{1.2}$$

$$T(x,t)\mid_{x=0} = \delta(t),\ T(x,t)\mid_{x=l} = 0, \tag{1.3}$$

где $u(x, t)$ - функция смещений, $\delta(t)$ - дельта - функция Дирака; T - функция напряжений:

$$T(x,t) = \mu(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau. \tag{1.4}$$

Одномерная обратная задача о нахождении ядра из одного уравнения вязкоупругости в ограниченной области с распределенными источниками возмущений рассмотрена в [1]. Методом Фурье задача сведена к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций зависящих от временной переменной. Однако, в приложениях наиболее интересными являются обратные задачи, когда данные прямой задачи представляют собой сингулярные обобщенные функции. Одна из таких задач изучена [2] где пространственную область представляет полупрямая $x > 0$. В работе [3] рассмотрена аналогичная задача в ограниченной по x области $0 < x < l$, с постоянными коэффицентами Ламэ и постоянной плотностью. В данной работе рассматривается более общий случай задачи в [3] когда ρ, μ, λ являются функциями переменной x, удовлетворяющими

[1] Программист 1-категории центра информационных технологий, Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент; j.safarov65@mail.ru.

условиям $\rho(x) > 0,\ \mu(x) > 0,\ \lambda(x) > 0$, причем $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$. Обратная задача заключается в определении ядра $k(t),\ t > 0$, входящего в (1.1) посредством формулы (1.4), если относительно решения задачи (1.1) - (1.4) известна дополнительная информация

$$u(x,t)|_{x=+0} = f(t),\ t > 0, \tag{1.5}$$

$f(t)$ - заданная функция. Как и в [4, с.53-59], здесь для исследования задачи применяется метод характеристок. Так как рассматривается только одно уравнение (а не система уравнений) функция $\lambda(x)$ не будет входить в уравнению [5].

Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле

$$y = \psi(x) := \int_0^x \frac{d\xi}{\nu(\xi)},\ \nu(x) := \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}}.$$

Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x)$.

Основными результатами настоящей работы является следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости обратной задачи и устойчивости решения.

Теорема 1.1. *Пусть* $f(t) \in C^3\,[0,\ 2l]$ *и* $f(+0) = -a$.

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.1)$-$(1.5) $k(t) \in C^2[0,\ 2l]$ *для любого* $l > 0$, *где* $a = [\mu(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}$

Пусть $K(h_0)$ - множество функций $k(t) \in C^2[0, 2l]$, удовлетворяющих для $t \in [0, 2l]$ неравенству $\|k(t)\|_{C^2[0,2l]} \leq h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0. Эта постоянная определена в (4.10).

Теорема 1.2. *Пусть* $k^1(t) \in K(h_0),\ \ k^2(t) \in K(h_0)$ *- решения обратной задачи (1.1) - (1.6) с набором данных*

$$\left\{\rho^1(\psi^{-1}(y)),\ \mu^1(\psi^{-1}(y)),\ f^1(t)\right\},$$

$$\left\{\rho^2(\psi^{-1}(y)),\ \mu^2(\psi^{-1}(y)),\ f^2(t)\right\},$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(h_0,\ h_{00},\ l)$, $h_{00} = \max\Big\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0,\ \psi^{-1}(l)]},\ \|\mu^1(y)\|_{C^3[0,\ \psi^{-1}(l)]}, \|f^1(t)\|_{C^2[0,\ 2l]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]},$ $\|\mu^2(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]},\ \|f^2(t)\|_{C^2[0,2l]}\Big\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|k^1(t) - k^2(t)\|_{C^2[0,2l]} \leq C\Big[\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]} + \|f^1 - f^2\|_{C^2[0,2l]}\Big]. \tag{1.6}$$

Доказательства теорем приводятся в разделе 4.

2. Предварительные построения

Подставляя (1.4) в (1.1) перепишем равенства (1.1) $-$ (1.3):

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)d\tau, \tag{2.1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]_{x=+0} = \delta(t). \tag{2.3}$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]_{x=l} = 0. \tag{2.4}$$

Пусть

$$v(y,t) := \frac{u\left(\psi^{-1}(y),t\right)}{s(y)},\ s(y) := \sqrt{\frac{\nu(+0)\rho(+0)}{\nu\left(\psi^{-1}(y)\right)\rho\left(\psi^{-1}(y)\right)}}.$$

Тогда обратная задача $(2.1)-(2.4)$, (1.5) в терминах вновь введенных функций и переменной y принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(y)v + \int_0^t k(t-\tau)\left(\frac{\partial^2 v(y,\tau)}{\partial y^2} + q(y)v(y,\tau)\right)d\tau, \tag{2.5}$$

$$0 < y < L,\ t \in R.$$

$$v|_{t<0} \equiv 0. \tag{2.6}$$

$$\left[\frac{\partial v(y,t)}{\partial y} + \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}d\tau\right]_{y=+0} = a\delta(t). \tag{2.7}$$

$$\left[\frac{\partial v(y,t)}{\partial y} + \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}d\tau\right]_{y=L} = 0. \tag{2.8}$$

$$v(y,t)|_{y=+0} = f(t),\ 0 < y < L, \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$q(y) = \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2,\ L := \psi(l).$$

Обозначим

$$\left[v(y,t) + \int_0^t k(t-\tau)v(y,\tau)d\tau\right]\exp\left(-k(0)t/2\right) = w(y,t).$$

Тогда, как нетрудно видеть

$$v(y,t) = \exp\left(k(0)t/2\right)w(y,t) + \int_0^t r(t-\tau)\exp\left(k(0)\tau/2\right)w(y,\tau)d\tau,$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Относительно новых функций $w(y,t)$ и $r(t)$ уравнения $(2.5)-(2.9)$ записываються в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H(y)w - \int_0^t h(t-\tau)w(y,\tau)d\tau,\ 0 < y < L,\ t \in R, \tag{2.11}$$

$$w|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.12}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=+0} = a\delta(t), \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=L} = 0, \tag{2.14}$$

$$w|_{y=+0} = f_0(t) + \int_0^t k_0(t-\tau) f_0(\tau) d\tau, \tag{2.15}$$

где

$$H(y) := q(y) + \frac{r^2(0)}{4} - r'(0), \;\; h(t) := r''(t) \exp\left(r(0)t/2\right),$$
$$f_0(t) := f(t) \exp\left(r(0)t/2\right), \;\; k_0(t) := k(t) \exp\left(r(0)t/2\right).$$

В (2.11) использовано равенство $k(0) = -r(0)$, вытекающее из (2.10).

Л е м м а 2.1. *Пусть* $k(t) \in C^2[0, \; \infty)$. *Тогда*

$$w(y,t) \equiv 0 \tag{2.16}$$

для $(y,t) \in D_1 := \{(y,t) : 0 < y < L, \; 0 < t < y\}$,

$$w(y,t) = -a - \int_0^{t-y} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[H(\xi) w(\xi, \tau - \xi) - \int_0^{\tau - 2\xi} h(\alpha) w(\xi, \tau - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau -$$
$$- \int_{t-y}^{t} \int_{\tau - t + y}^{\frac{2\tau - t + y}{2}} \left[H(\xi) w(\xi, 2\tau - t + x - \xi) - \int_0^{2\tau - t + y - 2\xi} h(\alpha) w(\xi, 2\tau - t + y - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \tag{2.17}$$

для $(y,t) \in D_2 := \{(y,t) : 0 < y < L, \; y < t < 2L - y\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для

$$(y,t) \in D_0 := \left\{ (y,t) : 0 < y < L, \; 0 < t < \frac{L}{2} - \left| y - \frac{L}{2} \right| \right\} \subset D_1$$

равенство (2.16) следует из формулы Даламбера для решения однородного уравнения (2.11) с нулевыми начальными данными (2.12).

Далее рассмотрим пучок характеристик оператора $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$ проходящий через отрезок $(0, L)$ оси y. Он высекает на правой границе области $D \setminus D_0$ отрезок $(0, L)$. Представляя волновой оператор в виде произведения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и интегрируя равенство (2.11) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка, заключенного в $D \setminus D_0$, найдем, используя условие (2.12)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \right) w|_{y=L} =$$

$$= \int_{\frac{t}{2}}^{t} \left[H(\tau - t + L) w(\tau - t + L, \tau) - \int_0^{\tau} h(\tau - \alpha) w(\tau - t + L, \alpha) d\alpha \right] d\tau, \;\; t \in (0, L).$$

С учетом граничного условия (2.14) при $y = L$, из этого равенства, находим

$$w(L,t) =$$

$$= \int_0^t \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \left[H(\tau_1-\tau+L)w(\tau_1-\tau+L,\tau_1) - \int_0^{\tau_1} h(\tau_1-\alpha)w(\tau_1-\tau+L,\alpha)d\alpha \right] d\tau_1 d\tau,\ t\in(0,L).$$

Произведя замену переменных во внутренном интеграле τ на ξ по формуле $\tau_1-\tau+l=\xi$, последнее уравнение перепишем в виде

$$w(L,t)=$$

$$= \int_0^t \int_{L-\frac{\tau}{2}}^{L} \left[H(\xi)w(\xi,\tau-L+\xi) - \int_0^{\tau-L+\xi} h(\tau-L+\xi-\alpha)w(\xi,\alpha)d\alpha \right] d\xi d\tau,\ t\in(0,L). \tag{2.18}$$

Интегрируя уравнение (2.11) вдоль характеристики $dy/dt=1$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\right) w(y,t)=$$

$$= \int_{\frac{L+y-t}{2}}^{x} \left[H(\xi)w(\xi,\xi+t-y) - \int_0^{\xi+t-y} h(\xi+t-y-\alpha)w(\xi,\alpha)d\alpha \right] d\xi,\ (y,t)\in D_1\backslash D_0.$$

Далее, используя формулу (2.18), находим уравнение для $w(y,t)$ в области $D_1\backslash D_0$:

$$w(y,t)=$$

$$= \int_0^{t+y-L} \int_{L-\frac{\tau}{2}}^{l} \left[H(\xi)w(\xi,\tau-L+\xi) - \int_0^{\tau-L+\xi} h(\tau-L+\xi-\alpha)w(\xi,\alpha)d\alpha \right] d\xi d\tau +$$

$$+ \int_{t+y-L}^{t} \int_{\frac{L+t+y-2\tau}{2}}^{t+y-\tau} \Big[H(\xi)w(\xi,\xi+2\tau-t-y) -$$

$$- \int_0^{\xi+2\tau-t-y} h(\xi+2\tau-t-y-\alpha)w(\xi,\alpha)d\alpha \Big] d\xi d\tau.$$

При выполнении условии леммы, последнее уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Отсюда

$$w(y,t)\equiv 0,\ (y,t)\in D_1\backslash D_0$$

и формула (2.16) установлена.

Рассмотрим область

$$D_2 := \{(y,t) : 0<y<L,\ y<t<2L-y\}.$$

Интегрируя (2.2) вдоль соответствующей характеристики, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right) w|_{y=0} = -\int_0^{\frac{t}{2}} \left[H(\xi)w(\xi,t-\xi) - \int_0^{t-2\xi} h(\alpha)w(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha \right] d\xi,\ t\in(0,2L).$$

В сочетании с граничным условием (2.3) при $y=0$ это равенство позволяет вычислить $w(y,t)$ при $y=0$:

$$w(0,t) = -a - \int_0^t \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[H(\xi)w(\xi,\tau-\xi) - \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha)w(\xi,\tau-\xi-\alpha)d\alpha \right] d\xi d\tau,\ t\in(0,2L).$$

Используя последнее равенство, получаем для $w(y,t)$ интегральное уравнение (2.17). Переходя в этом уравнении к пределу при $t \to y+0$, заметим прежде всего, что

$$w(y, y+0) = -a, y \in (0, L). \tag{2.19}$$

Это значит, что решение задачи (2.2) – (2.3) терпит разрыв первого рода при переходе через характеристической линии $t = y$. При этом скачок функции равен $-a$. Уравнение (2.17) является в области D_2 уравнением вольтерровского типа. Поэтому решение его единственно в классе функций, принадлежащих пространству $C(D_2)$, и может быть получено методом последовательных приближений. Существование решения в этом классе вытекает из принадлежности $k(t)$ классу $C^2[0, 2L]$. Более того, непосредственным дифференцированием уравнения (2.17) нетрудно убедиться, что его решение принадлежит классу $C^2(D_2)$.

3. Сведение обратной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений

Лемма 3.1. *При выполнении условий теоремы обратная задача (2.11) - (2.15) для $(y,t) \in D_2$ эквивалентна задаче нахождения вектор - функций $w(y,t)$, $w_t(y,t)$, $w_{tt}(y,t)$, $h(t)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$ из системы, составленной из равенства (2.18) и следующих уравнений:*

$$w_t(y,t) = \frac{a}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta -$$
$$-\int_0^{\frac{t-y}{2}} \left[H(\xi)w(\xi, t-y-\xi) - \int_0^{t-y-2\xi} h(\alpha)w(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi -$$
$$-\int_0^y \int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}} \left[H(\xi)w_t(\xi, t+y-2\beta-\xi) + ah(t+y-2\beta-2\xi) -\right.$$
$$\left.-\int_0^{t+y-2\beta-2\xi} h(\alpha)w_t(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi d\beta, \tag{3.1}$$

$$w_{tt}(y,t) = \frac{a}{4}\left(H(\frac{t+y}{2}) + H(\frac{t-y}{2})\right) -$$
$$-\frac{ay}{2}h(t-y) - \frac{1}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})B(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta -$$
$$-\int_0^{\frac{t-y}{2}} \left[H(\xi)w_t(\xi, t-y-\xi) + ah(t-y-2\xi) - \int_0^{t-y-2\xi} h(\alpha)w_t(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi -$$
$$-\int_0^y \int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}} \left[H(\xi)w_{tt}(\xi, t+y-2\beta-\xi) - B(\xi)h(t+y-2\beta-2\xi) -\right.$$
$$\left.-\int_0^{t+y-2\beta-2\xi} h(\alpha)w_{tt}(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi d\beta, \tag{3.2}$$

$$h(t) = H'(\frac{t}{2}) - \frac{1}{a}H(\frac{t}{2})B(\frac{t}{2}) - \frac{2}{a}f_0'''(t) -$$

$$-\frac{2}{a}\left[f''(0)-\frac{3}{a}\left[f'(0)\right]^2\right]k_0(t)-\frac{4}{a}f'(0)k_0'(t)+2k_0''(t)-\frac{2}{a}\int_0^t k_0(\tau)f_0'''(t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{2}{a}\int_0^{\frac{t}{2}}\left[H(\xi)w_{tt}(\xi,t-\xi)-h(t-2\xi)B(\xi)-\int_0^{t-2\xi}h(\alpha)w_{tt}(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi, \tag{3.3}$$

$$k_0(t)=-r(0)+\left(\frac{r^2(0)}{2}-r'(0)\right)t+\int_0^t(t-\tau)k_0''(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

$$k_0'(t)=\frac{r^2(0)}{2}-r'(0)+\int_0^t k_0''(\tau)d\tau, \tag{3.5}$$

$$k_0''(t)=-h(t)+\left(\frac{r^2(0)}{4}-r'(0)\right)k_0(t)-\int_0^t h(t-\tau)k_0(\tau)d\tau. \tag{3.6}$$

Неизвестные числа в этих равенствах выражаются через значения в нуле заданной функции $f(t)$ и ее производных, понимаемые как правый предел, следующим образом:

$$r(0)=-\frac{2}{a}f'(0),\ r'(0)=\frac{1}{2a}\left[-f''(0)+\frac{2}{a}\left[f'(0)\right]^2+aq(0)\right]. \tag{3.7}$$

Для доказательства леммы заметим, что интегральное уравнение (2.18) выведено из соотношений (2.12) - (2.14). Заменяя во внешнем интеграле последнего слагаемого в (2.18) переменное интегрирование τ на β по формуле $t-\tau=\beta$ и дифференцируя его последовательно два раза по переменной t, получим соответственно уравнения (3.1), (3.2). При этом для получения уравнение (3.1) использовано соотношение (2.19), а для (3.2) - соотношение (2.19) и равенство

$$w_t(y,y)=\frac{a}{2}\int_0^y H(\xi)d\xi =: B(y),$$

вытекающее из (3.1). Далее в уравнении (2.18) положим $y=0$ и воспользуемся условием (2.15). Тогда, имеем

$$f_0(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0(t-\tau)d\tau=$$

$$=-a-\int_0^t\int_0^{\frac{\tau}{2}}\left[H(\xi)w(\xi,\tau-\xi)-\int_0^{\tau-2\xi}h(\alpha)w(\xi,\tau-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau, t\in(0,2L).$$

Отсюда, в частности, следует необходимое условие разрешимости обратной задачи

$$f(0)=-a.$$

Дифференцируя предыдущее интегральное уравнение, находим

$$f_0'(t)-ak_0(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0'(t-\tau)d\tau=$$

$$=-\int_0^{\frac{t}{2}}\left[H(\xi)w(\xi,t-\xi)-\int_0^{t-2\xi}h(\alpha)w(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi, t\in(0,2L). \tag{3.8}$$

Полагая здесь $t=0$ и используя равенство $r(0)=-k(0)$, вытекающее из (2.10), получаем $r(0)=-2f'(0)$. Дифференцируя (3.8), имеем

$$f_0''(t)+k_0(t)f_0'(0)-ak_0'(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0''(t-\tau)d\tau=$$

$$= aH(\frac{t}{2}) - \int_0^{\frac{t}{2}} \left[H(\xi)w_t(\xi, t-\xi) + ah(t-2\xi) - \int_0^{t-2\xi} h(\alpha)w_t(\xi, t-\xi-\alpha)d\alpha \right] d\xi, \ t \in (0, 2L). \tag{3.9}$$

В этом равенстве, также полагая $t = 0$ и произведя элементарные вычисления, выразим $r'(0)$, через известные числа по формулам (3.7). Нетрудно заметить, что уравнение (3.3) получится в результате дифференцирования равенство (3.9). Для замыкания системы интегральных уравнений (2.18), (3.1) – (3.3) используются очевидные равенства (3.4)–(3.6). При выполнении условий теоремы, справедливость обратных преобразований устанавливается обычным приемом [6].

Тем самым лемма 2 доказана.

4. Доказательства теорем

Запишем систему уравнений (2.8) и (3.1) – (3.6) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi \tag{4.1}$$

где

$$\varphi = [\varphi_1(y,t), \varphi_2(y,t), \varphi_3(y,t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t), \varphi_7(t)] =$$

$$[w(y,t), w_t(y,t), w_{tt}(y,t) + \frac{ay}{2}h(t-y), h(t) + \frac{2}{a}\left[f''(0) - \frac{3}{a}\left[f'(0)\right]^2\right]k_0(t) + \frac{4}{a}f'(0)k_0'(t) - 2k_0''(t),$$

$$k_0(t), k_0'(t), k_0''(t) + h(t) - \left(\frac{r^2(0)}{4} - r'(0)\right)k_0(t)\Big]$$

– векторная функция с компонентами $\varphi_i, i = \overline{1,7}$, а оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (2.8) и (3.1) – (3.6) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$:

$$A_1\varphi = \varphi_{01} - \int_0^{t-y}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \Big[H(\xi)\varphi_1(\xi, t-\xi) - \frac{1}{3}\int_0^{t-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(\xi, t-\xi-\alpha)d\alpha\Big] d\xi d\tau - \int_{t-y}^{t}\int_{\tau-t+y}^{\frac{2\tau-t+y}{2}} \Big[H(\xi)\varphi_1(\xi, 2\tau-t+y-\xi) -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\tau-t+y-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(\xi, 2\tau-t+y-\xi-\alpha)d\alpha\Big] d\xi d\tau, \tag{4.2}$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} - \int_0^{\frac{t-y}{2}} \Big[H(\xi)\varphi_1(\xi, t-y-\xi) -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{t-y-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_1(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\Big] d\xi -$$

$$-\int_0^{y}\int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}} \Big[H(\xi)\varphi_2(\xi, t+y-2\beta-\xi) - \frac{1}{3}[2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi) + \varphi_4(t+y-2\beta-2\xi) +$$

$$+3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi] - \frac{1}{3}\int_0^{t+y-2\beta-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_2(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha)d\alpha\Big] d\xi d\beta, \tag{4.3}$$

$$A_3\varphi=\varphi_{03}-\int_0^{\frac{t-y}{2}}\Bigg[H(\xi)\varphi_2(\xi,t-y-\xi)+\frac{a}{3}[2\varphi_7(t-y-2\xi)+\varphi_4(t-y-2\xi)+3q_{00}\varphi_5(t-y-2\xi)-$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-y-2\xi)]-\frac{1}{3}\int_0^{t-y-2\xi}[2\varphi_7(\alpha)+\varphi_4(\alpha)+3q_{00}\varphi_5(\alpha)-$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_2(\xi,t-y-\xi-\alpha)d\alpha\Bigg]d\xi-\int_0^y\int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}}\Bigg[H(\xi)\varphi_2(\xi,t+y-2\beta-\xi)-$$

$$\frac{ay}{6}[2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi)+\varphi_4(t+y-2\beta-2\xi)+3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi)-$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi)]-\frac{1}{3}B(\xi)[2\varphi_7(t+y-2\beta-\xi)+\varphi_4(t+y-2\beta-\xi)+3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-\xi)-$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-\xi)]-\frac{1}{3}\int_0^{t+y-2\beta-2\xi}[2\varphi_7(\alpha)+\varphi_4(\alpha)+3q_{00}\varphi_5(\alpha)-$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)][\varphi_3(\xi,t+y-2\beta-\xi-\alpha)+\frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi-\alpha)+$$

$$+\varphi_4(t+y-2\beta-2\xi-\alpha)+3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi-\alpha)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi-\alpha)]d\alpha\Bigg]d\xi d\beta,\quad(4.4)$$

$$A_4\varphi=\varphi_{04}-\frac{2}{a}\int_0^t\varphi_5(\tau)f_0'''(t-\tau)d\tau+2\int_0^{\frac{t}{2}}\Bigg[[H(\xi)\varphi_3(\xi,t-\xi)+\frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t-2\xi)+\varphi_4(t-2\xi)+$$

$$+q_{00}\varphi_5(t-2\xi)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-2\xi)]-\frac{B(\xi)}{3}[2\varphi_7(\alpha)+\varphi_4(\alpha)+3q_{00}\varphi_5(\alpha)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]-$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{t-2\xi}[2\varphi_7(\alpha)+\varphi_4(\alpha)+3q_{00}\varphi_5(\alpha)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)][\varphi_3(\xi,t-\xi-\alpha)+$$

$$+\frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t-2\xi-\alpha)+\varphi_4(t-2\xi-\alpha)+3q_{00}\varphi_5(t-2\xi-\alpha)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-2\xi-\alpha)]d\alpha\Bigg]d\xi,\quad(4.5)$$

$$A_5\varphi=\varphi_{05}+\frac{1}{3}\int_0^t(t-\tau)[\varphi_7(\tau)-\varphi_4(\tau)+q_0\varphi_5(\tau)+\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\tau)]d\tau,\quad(4.6)$$

$$A_6\varphi=\varphi_{06}+\frac{1}{3}\int_0^t[\varphi_7(\tau)-\varphi_4(\tau)+q_0\varphi_5(\tau)+\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\tau)]d\tau,\quad(4.7)$$

$$A_7\varphi=\varphi_{07}-\frac{1}{3}\int_0^t[2\varphi_7(t-\tau)+\varphi_4(t-\tau)+q_0\varphi_5(t-\tau)-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-\tau)]\varphi_5(\tau)d\tau,\quad(4.8)$$

где введено обозначение

$$\varphi_0(y,t)=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03},\varphi_{04},\varphi_{05},\varphi_{06},\varphi_{07}):=$$

$$\Bigg[-a,\frac{a}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta,\frac{a}{4}\left(H(\frac{t+y}{2})+H(\frac{t-y}{2})\right)-\frac{1}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})\times$$

$$\times B(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta,H'(\frac{t}{2})-\frac{1}{a}H(\frac{t}{2})B(\frac{t}{2})-\frac{2}{a}f_0'''(t),$$

$$-r(0) + \left(\frac{r^2(0)}{2} - r'(0)\right) t, \frac{r^2(0)}{2} - r'(0), 0\Big].$$

$$q_0 := \frac{5}{2a} f''(0) - \frac{6}{a^2}[f'(0)]^2 - \frac{1}{2} q(0), \ q_{00} := -\frac{1}{3a} f''(0) + \frac{2}{a^2}[f'(0)]^2 - \frac{1}{3} q(0).$$

Обозначим через C_σ банахова пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||\varphi||_\sigma = \max\{\sup_{(y,t)\in D_2} |\varphi_i(x,t) e^{-\sigma t}|, i = \overline{1,3}, \sup_{t\in[0,2L]} |\varphi_j(t) e^{-\sigma t}|, j = \overline{4,7}\}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\|, \tag{4.9}$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0, \infty)$. Число σ будем выбрать позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) := \{\varphi : \|\varphi - \varphi_0\| \leq \|\varphi_0\|\}$ - шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geq 0)$, в котором

$$\|\varphi_0\| = \max(\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|, \|\varphi_{04}\|, \|\varphi_{05}\|, \|\varphi_{06}\|, \|\varphi_{07}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x,t) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. На самом деле, с помощью равенств $(4.2) - (4.8)$ составляя норму разностей, для $(y,t) \in D_2$ имеем

$$\|A\varphi - \varphi\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A\varphi - \varphi) e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma} \alpha_0,$$

$$\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma}{\sigma} \beta_0$$

где

$$\alpha_0 := max\Bigg(L\left[3H_0 + 4\|\varphi_0\|(3 + 3q_{00} + \frac{4}{a}|f'(0)|)L\right], 2\left[\frac{H_0}{2} + L(H_0 + 1 + 2q_{00} + \frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{3}{4} + 9L\|\varphi_0\|)\right],$$

$$2\left[H_0(1 + \frac{L}{4}) + (1 + q_00 + \frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{a}{2} + \frac{aL^2}{8} + \frac{B_0 L}{4} + \|\varphi_0\|(2L + 1 + \frac{aL}{2}(1 + q_{00} + \frac{4}{3a}|f'(0)|))) \cdot 3L^2\right],$$

$$2\left[\frac{2}{a}F_0 + 2H_0 + (1 + q_{00} + \frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{1}{2} + B_0 + 2\|\varphi_0\|(4 + a(1 + q_{00} + \frac{4}{3a}|f'(0)|)))L\right],$$

$$\frac{2(2a + aq_0 + 4|f'(0)|) \cdot 2L}{3a}, \frac{2(2a + aq_0 + 4|f'(0)|)}{3a},$$

$$2\left[\frac{(r(0) + 2r_{00}L)(3a + 2q_0 + 4)}{3} + \frac{2}{9a^2} L^2 \|\varphi_0\|(3a + 2q_0 + 4)(2a + q_0 + 4)\right]\Bigg)$$

$$\beta_0 := max\Bigg(L\left[\frac{3H_0}{2} + 2\|\varphi_0\|(3 + 3q_{00} + \frac{4}{a}|f'(0)|)L\right], \left[\frac{H_0}{2} + L(H_0 + 1 + 2q_{00} + \frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{3}{4} + 18L\|\varphi_0\|)\right],$$

$$\left[H_0(1+\frac{L}{4})+(1+q_00+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{a}{2}+\frac{aL^2}{8}+\frac{B_0L}{4}+2\|\varphi_0\|(2L+1+\frac{aL}{2}(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))\cdot 3L^2\right],$$

$$\left[\frac{2}{a}F_0+2H_0+(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{1}{2}+B_0+2\|\varphi_0\|(4+a(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))L\right], \frac{2L(2a+aq_0+4|f'(0)|)}{3a}$$

$$\left(2+2r_0+4|f'(0)|\right), \left[\frac{(r(0)+2r_{00}L)(3a+2q_0+4)}{3}+\frac{4}{9a^2}L^2\|\varphi_0\|(3a+2q_0+4)(2a+q_0+4)\right]\Bigg).$$

Как следует из проделанных оценок если число σ выбрано из условия $\sigma > max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (4.1) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $k_0(t) = k(t)\exp(r(0)t/2)$, то по найденной функции $k_0(t)$ функция $k(t)$ находится по формуле

$$k(t) = k_0(t)\exp(-r(0)t/2).$$

Теорема 1.1 доказана.

Докажем теперь теорему 1.2. Так как условия теоремы 1.1 выполнены, то решение (4.1) принадлежит множеству $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\sigma \le 2\|\varphi_0\|$, $i = \overline{1,7}$. Таким образом,

$$\max_{t\in[0,2l]} |k(t)| \le 2\|\varphi_0\| \exp(|r(0)|l) := h_0. \tag{4.10}$$

Пусть φ^j, $j = 1,2$ - вектор функций, которые являются решениями (4.1) с набором данных $\left\{\rho^j(\psi^{-1}(y)), \mu^j(\psi^{-1}(y)),\ f^j(t)\right\}$, $j = 1,2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\varphi^j = A\varphi^j$ для $j = 1,2$. Известные функции $\rho^j[\psi^{-1}(y)]$, $\mu^j[\psi^{-1}(y)]$, $j = 1,2$ в свободные члены этих интегральных уравнений входят соответствующим образом через сложные функции $H^j(y)$, $q^j(y)$, $s^j(y)$, $j = 1,2$. Переходя в этих выражениях к разностям $\rho^1 - \rho^2$, $\mu^1 - \mu^2$, подобно тому как это сделано в книге [7, с.95-110], из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1, для $\sigma \ge \sigma^*$ получим оценку

$$\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma \le C_0\gamma + \frac{\sigma^*}{\sigma}\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma, \tag{4.11}$$

где

$$\gamma := \|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l]} + \|f^1 - f^2\|_{C^2[0,2l]}$$

и постоянная C_0 зависит от тех параметров, что и C в теореме 2. Из неравенств (4.9) и (4.11) следует оценка

$$\left\|k_0^1 - k_0^2\right\| \le C_1\gamma,$$

с постоянной $\sigma C_0/(\sigma - \sigma^*)$. Тогда, рассматривая уравнение (4.9) для $\{k^1, k_0^1\}$, $\{k^2, k_0^2\}$ и используя (4.11), получим оценку (1.6).

Список литературы

1. Janno J. and von Wolfersdorf L., “Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity”, *Math. methods in Appl. Sciences*, **20**:4 (1997), 291 - 314.

2. Дурдиев Д. К, Тотиева Ж. К., “Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:2 (2013), 72 - 82.

3. Дурдиев Д. К, Сафаров Ж. Ш., “Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области”, *Мат.заметки.*, **97**:6 (2015), 855–867.

4. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984, 264 с.

5. Туаева Ж. Д., “Многомерная математическая модель сейсмики с памятью”, *Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН*, 2008, 297–306.

6. Дурдиев Д. К., “Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **12**:3 (2009), 28–40.

7. Яхно В. Г., *Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости*, Наука, Новосибирск, 1990, 304 с.

The one-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in a bounded domain.

© **J. Sh. Safarov** [2]

Abstract. One-dimensional integro-differential equation, which arises in the theory of viscoelasticity with density $\rho = \rho(x)$ and Lame coefficients $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$ is considered. This problem is studied in a bounded domain with respect to x, exactly on segment $[0, l]$. The initial conditions are zero. The boundary conditions are a function of the stress at the left end of segment $[0, l]$ in the form of a concentrated source of perturbation, and on the right - zero. For the direct problem we study the inverse problem of determining the kernel belonging to the integral term of the equation, for supplementary information about the function of the displacement at $x = 0$. The inverse problem is replaced by an equivalent system of integral equations for the unknown functions. To the system in the space of continuous functions with weighted norms, the principle of contraction mappings is applied. Theorems global unique solvability and stability of the solution of the inverse problem are proved.

Key Words: inverse problem, equation of viscoelasticity, the kernel of the integral, integro-differential equation, delta function, stress function

[2] Programmer 1 category Center of Information Technologies, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent; j.safarov65@mail.ru.