УДК 517.928.7

О явных оценках точности приближения в первой теореме Боголюбова

© П. С. Красильников[1]

Аннотация. Исследуется задача получения явных оценок точности приближений в методе усреднения стандартных по Боголюбову систем. Показано, что вид этих оценок зависит от значений некоторого параметра Λ^* , влияющего на характер сходимости временного среднего. Формулируется утверждение о явных оценках точности приближения (гипотеза Волосова). Утверждение доказано при некоторых дополнительных ограничениях на правую часть диффереенциальных уравнений.

Ключевые слова: временное среднее, точность приближения, метод усреднения

1. Введение

Известно, что в классической работе Н.Н. Боголюбова [1], в статьях И.И. Гихмана [2], М.А. Красносельского [3], в работах других авторов оценка точности приближения метода усреднения стандартной по Боголюбову системы

$$\dot{x} = \varepsilon X(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

имеет асимптотический характер:

$$\|x(t) - u(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

Здесь L – произвольный, сколь угодно большой параметр, $u(t)$ – решение усредненных уравнений

$$\dot{u} = \varepsilon \overline{X}(u), \quad \overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(x,t)\, dt \tag{1.2}$$

Известно [4], что при решении прикладных задач правомерность асимптотических оценок сомнительна, так как параметр ε фиксирован и редко бывает малым. Чтобы применить метод усреднения часто используют «железный закон, согласно которому тройку по сравнению с единицей можно считать величиной бесконечно большой, а одну треть – бесконечно малой» [5]. Более того, в некоторых задачах динамики спутников приходится ограничивать параметр ε снизу, так как при уменьшение ε меняется вид уравнений движения (меняется модель задачи). В этом случае асимптотические оценки не работают.

Явная оценка точности приближения впервые получена для периодической правой части в работе [6]:

Т е о р е м а 1.1. *Предположим, что $X(x,t)$ периодична по t с периодом T, существует непрерывный и равномерно ограниченный по t $(0 \leqslant t < \infty)$ градиент функции $X(x,t)$, $x \in D$, при этом решения $x(t)$, $u(t)$ определены при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для любого L существует константа C, зависящая от L такая, что*

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant C(L)\varepsilon, \quad \textit{при} \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

[1] Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; krasil06@rambler.ru.

J.G. Besjes [7] усилил эти результаты: получил явное выражение для коэффициента $C(L)$ в теореме 1.1. Рассмотрел также случай произвольной зависимости правых частей от времени и получил точность приближения порядка $\sqrt{\delta(\varepsilon)}$. Здесь

$$\delta(\varepsilon)=\varepsilon\Lambda(\varepsilon),\quad \Lambda(\varepsilon)=\sup_{x\in D}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant L/\varepsilon}\left\|\int\limits_0^t\left[X(x,\tau)-\overline{X}(x)\right]d\tau\right\|\right] \tag{1.3}$$

D - область изменения фазовой перменной x.

2. Теорема Боголюбова. Быстрое равномерное среднее.

Современная формулировка теоремы Боголюбова имеет следующий вид. Пусть $X(x,t)$ определена в некоторой открытой, связной области D' переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)^\tau$, когда $t\in[0,+\infty)$ и удовлетворяет в некоторой открытой подобласти $D\times[0,+\infty)$, $D\in D'$ следующим условиям:

1) условию непрерывности по t при любых фиксированных x

2) условию Липшица по x с независимой от x и t константой λ:

$$\left\|X\left(x^{(1)},t\right)-X\left(x^{(2)},t\right)\right\|\leqslant\lambda\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,$$

где $\|x\|=\sqrt{\sum\limits_k x_k^2}$

3) условию равномерного ограничения в области $D\times[0,+\infty)$, т.е.

$$\|X(x,t)\|<M,\quad M=const$$

сразу для всех $x\in D$ и $t\geqslant 0$

4) условию существования равномерного по $u\in D$ предела

$$\overline{X}(u)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(u,t)\,dt$$

Справедливо следующее утверждение ([1], [7]).

Теорема 2.1. *Если для дифференциальных уравнений* (1.1) *выполнены условия 1–4, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, тогда для любых наперед заданных* $L>0$ *и* $\rho>0$ *можно найти положительное* $\varepsilon_0(L,\rho)$, *такое, что если* $u=u(t,\varepsilon)$ *– решение задачи Коши для усредненных уравнений*

$$\dot{u}=\varepsilon\overline{X}(u),\quad u(0)=x_0,$$

определенное в интервале $0\leqslant t<\infty$ *и принадлежащее области* D *вместе с* ρ*-окрестностью, то для всякого* ε *из интервала* $(0,\varepsilon_0)$ *и при* $0\leqslant t<L/\varepsilon$ *справедливы следующие оценки точности приближения.*

1. $X(x,t)$ *–* T *–периодическая функция времени* t, *тогда*

$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon TM(\lambda L+2)e^{\lambda L} \tag{2.1}$$

2. $X(x,t)$ *– произвольная функция времени, тогда*

$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\leqslant\sqrt{\delta(\varepsilon)}\,2L\sqrt{2\lambda M}\,e^{\lambda L} \tag{2.2}$$

Здесь $\delta(\varepsilon)$ *вычисляется по формуле* (1.3), *при этом* $\delta(\varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

В работе [8] показано, что в случае произвольной зависимости правых частей от времени дальнейшее продвижение в вопросе получения явных оценок точности приближения зависит от значения параметра

$$\Lambda^* = \lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda(\varepsilon) = \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T\leqslant\infty}\left\|\int_0^T \widetilde{X}(x,\tau)\,d\tau\right\|, \quad \widetilde{X}(x,\tau) = X(x,\tau) - \overline{X}(x)$$

Очевидно, что Λ^* ограничивает функцию $\Lambda(\varepsilon)$ сверху.

Рассмотрим случай $\Lambda^* < \infty$. Следуя Волосову В.М.[9], введем определение

О п р е д е л е н и е 2.1. *Будем говорить, что временное среднее является быстрым по времени и равномерным по x, если существуют константы T^* и Λ, не зависящие от x, такие, что при $T \geqslant T^*$ и любом $x \in D$ выполняется неравенство*

$$\left\|\frac{1}{T}\int_0^T X(x,\tau)\,d\tau - \overline{X}(x)\right\| \leqslant \frac{\Lambda}{T}.$$

Другими словами, имеем

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(x,\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

Положим

$$S(x,T) \stackrel{def}{=} \int_0^T \widetilde{X}(x,\tau)\,d\tau$$

Т е о р е м а 2.2. *Предположим, что равномерное среднее существует, D – компактное множество. Тогда временное среднее является быстрым по времени и равномерным по x тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\| = \Lambda^* < \infty. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что выполняется условие (2.3). Тогда, если в левой части этого неравенства оставить только норму интеграла, заменив T на произвольное число T^*, то неравенство примет вид $\|S(x,T^*)\| \leqslant \Lambda^* < \infty$. Более того, для любых $x \in D$ и любых $T \geqslant T^*$ будем иметь

$$\left\|\int_0^T X(x,\tau)\,d\tau - \overline{X}(x)T\right\| \leqslant \Lambda, \tag{2.4}$$

где $\Lambda = \Lambda^*$. Поделив полученное неравенство на T, получим условие быстрой равномерной сходимости интеграла к своему предельному значению.

Пусть временное среднее является быстрым. Тогда существуют $\Lambda < \infty$ и T^* такие, что при любых $x \in D$ и любом $T \geqslant T^*$ выполняется неравенство (2.4). Оценим сверху величину Λ^*:

$$\Lambda^* = \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\| \leqslant \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<T^*}\|S(x,T)\| + \sup_{x\in D}\sup_{T^*\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\|$$

Очевидно, первое слагаемое правой части неравенства ограничено в силу ограниченности интервала изменения T и компактности D, второе слагаемое меньше Λ в силу условия быстрой сходимости. Поэтому $\Lambda^* < \infty$.
Доказательство закончено.

Заметим, что неравенство (2.3) нарушается при резонансах, если $X(x,t)$ зависит от времени квази - периодически, а ее ряд Фурье состоит из конечного числа членов:

$$X(x,t) = X^{(0)}(x) + \sum_{\|k\|=1}^{m} X^{(k)}(x)e^{i(k,\omega)t}, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$$

Тогда интеграл $S(x,T)$ ограничен по T равномерно относительно x, если D компактно и отсутствуют резонансы:

$$\|S(x,T)\| = \left\| \int_0^T \sum_{\|k\|=1}^{m} X^{(k)}(x)e^{i(k,\omega)\tau}\, d\tau \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{\|k\|=1}^{m} \frac{X^{(k)}(x)}{i(k,\omega)} \left(e^{i(k,\omega)T} - 1\right) \right\| \leqslant \sum_{\|k\|=1}^{m} \left\| \frac{X^{(k)}(x)}{(k,\omega)} \right\| < \infty$$

Наличие резонансов ведет к бесконечному росту соответствующих членов полинома со временем, так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{izT} - 1}{iz} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{izT}}{i}(iT) = T$$

Как следствие, интеграл $S(x,T)$ становится неограниченной функцией времени T.

Таким образом, условие быстрой равномерной сходимости среднего является неявной формой записи отсутствия резонансов, когда функция $X(x,t)$ представима конечным рядом Фурье. Аналогичный вывод справедлив и для бесконечных рядов Фурье, но с некоторыми оговорками. Не останавливаясь подробно на анализе, отметим только, что в отсутствии резонансов параметр Λ^* может принимать сколь угодно большие значения, если частоты слабо несоизмеримы, при этом спектор частот функции $X(x,t)$ имеет предельной точкой ноль. Далее, в случае неравномерной сходимости по t ряда Фурье для интеграла $S(x,T)$ параметр Λ^* может принимать бесконечно большие значения (соответствующий пример построил Пуанкаре [10]).

В дальнейшем будем рассматривать нерезонансный случай, так как при резонансе временное среднее сходится неравномерно, и, следовательно, теорема Боголюбова не работает.

Получим достаточные достаточные условия быстрой сходимости среднего. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Предположим, что равномерное среднее существует, D – компактное множество, и выполняется одно из следующих условий:*

1. Несобственный интеграл

$$S(x,\infty) = \int_0^\infty \widetilde{X}(x,\tau)d\tau$$

сходится при любых $x \in D$.

2. Несобственный интеграл $S(x,\infty)$ расходится, когда x принадлежит некоторому подмножеству $\widetilde{D}$ области D, при этом равномерно по $x \in \widetilde{D}$

$$\sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\| < \infty; \tag{2.5}$$

несобственный интеграл $S(x,\infty)$ *сходится при любых* $x \in D \setminus \widetilde{D}$.

Тогда равномерное среднее является быстрым, т.е. $\Lambda^* < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняется условие *1* леммы. Предположим противное: $\Lambda^* = \infty$. Из непрерывности $\widetilde{X}(x,t)$ по x и t следует ограниченность интеграла $S(x,T)$ на компактном множестве D , когда T конечно. Поэтому на бесконечном интервале изменения времени T супрерум по x от непрерывной нормы $\|S(x,T)\|$ принимает бесконечно большое значение только при $T=\infty$. Следовательно, несобственный интеграл $S(x,\infty)$ расходится при некотором $x \in D$, что противоречит условию *1*. Таким образом, $\Lambda^* < \infty$, поэтому, на основании предыдущей леммы, временное среднее сходится быстро и равномерно.

Предположим, что выполняется условие *2*. Имеет место неравенство

$$\Lambda^* \leqslant \sup_{x\in\widetilde{D}} \sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\| + \sup_{x\in D\setminus\widetilde{D}} \sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\|$$

Первое слагаемое ограничено в силу неравенства (2.5), второе – в силу сходимости интеграла $S(x,\infty)$ на множестве $D \setminus \widetilde{D}$, поэтому $\Lambda^* < \infty$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В заключении, отметим еще одно свойство быстрого равномерного среднего. Очевидно, что функция $\Lambda(\varepsilon)$ монотонно возрастает (хотя бы в широком смысле, т.е. не убывает) при $\varepsilon \to 0$. Справедливо также равенство

$$\Lambda^* = \lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda(\varepsilon)$$

Если равномерное среднее сходится быстро, т.е. $\Lambda^* < \infty$, то выполняется условие полосы

$$0 \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\Lambda^*,$$

так как $0 \leqslant \Lambda(\varepsilon) \leqslant \Lambda^*$. Поэтому $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

3. Медленное равномерное среднее.

Предположим, что равномерное среднее существует и равно $\overline{X}(x)$.

О п р е д е л е н и е 3.1. *Будем говорить, что временное среднее является медленным по времени и равномерным по* x , *если стремление среднего к своему предельному значению определяется равномерным по* x *равенством*

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T X(x,\tau)\,d\tau + O\left(\frac{g(T)}{T}\right), \tag{3.1}$$

где $g(T)$ *– положительная скалярная функция такая, что* $g(T)\to\infty$ *при* $T\to\infty$, *при этом*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{g(T)}{T} = 0. \tag{3.2}$$

Установим связь этого определения с параметром Λ^* . С этой целью введем некоторые понятия.

Непрерывную функцию $f(x,t)$ будем называть бесконечно большой при $t\to\infty$ в области D, если для любого фиксированного $x\in D$ выполняется одно из следующих условий:

(i) функция $f(x,t)$ имеет бесконечный предел

$$\lim_{t\to\infty}\|f(x,t)\|=\infty$$

(ii) функция $f(x,t)$ не имеет предела при $t\to\infty$, но при любом сколь угодно большем N существует окрестность точки $t=\infty$ в которой норма $\|f(x,t)\|$ принимает значение больше N хотя бы в одной точке $t=t^*$ из этой окрестности.

Предположим, что $f(x,t)$ – функция, бесконечно большая при $t\to\infty$, $g(t)>0$ – скалярная функция такая, что $g(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Будем говорить, что $f(x,t)$ имеет *одинаковый с* $g(t)$ *порядок роста при* $t\to\infty$ *равномерно по* x *в области* B, если для любого сколь угодно большего $\gamma>0$ существуют константы $A_1(\gamma)\geqslant 0$, $A_2(\gamma)>0$ такие, что при любом $x\in B$ выполняется условие полосы

$$A_1(\gamma)g(t)\leqslant\|f(x,t)\|\leqslant A_2(\gamma)g(t), \tag{3.3}$$

когда $t\in[\gamma,\infty)$. Будем писать $f(x,t)=O(g(t))$ при $t\to\infty$ равномерно по x.

Отметим, что условие полосы (3.3) не требует существования предела функции $f(x,t)$ при $t\to\infty$.

Теорема 3.1. *Предположим, что равномерное среднее существует, D – компактное множество. Тогда временное среднее является медленным по времени и равномерным по x тогда и только тогда, когда $\Lambda^*=\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\Lambda^*=\infty$. Оценим порядок малости функции

$$\Delta(x,T)=\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(x,\tau)d\tau-\overline{X}(x)\right\|=\frac{1}{T}\|S(x,T)\|,$$

когда T стремится к бесконечности. Прежде всего отметим, что в силу леммы (2.1.) несобственный интеграл $S(x,\infty)$ будет расходится на некоторой подобласти $\widetilde{D}\subseteq D$, при этом в этой подобласти имеем

$$\sup_{0\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\|=\infty$$

Такое возможно, если для каждого $x\in\widetilde{D}$ существует неограниченный предел

$$\lim_{T\to\infty}\|S(x,T)\|=\infty.$$

Предела может и не быть, но в этом случае функция $S(x,T)$ расходится, к примеру, осциллируя со временем так, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает, а наибольшие и наименьшие значения интеграла $S(x,T)$ стремятся соответственно к $+\infty$ и $-\infty$ при $T\to\infty$.

Несложно видеть, что $S(x,T)$ удовлетворяет определению бесконечно большой функции при $T\to\infty$. Пусть $g(T)$ – скалярная положительная функция, имеющая одинаковый с $S(x,t)$, равномерный по x порядок роста при $T\to\infty$. Тогда $S(x,T)=O(g(T))$. Так как $\Delta(x,T)\to 0$ при $T\to\infty$ равномерно по x, то $S(x,T)$ имеет меньший порядок роста, чем функция T, то есть

$$\lim_{T\to\infty}\frac{g(T)}{T}=0. \tag{3.4}$$

Такое возможно, если $g(T)$ имеет, к примеру, одно из следующих представлений:

$$g(T) = T^{\alpha},\ O < \alpha < 1;\ \ g(T) = \ln^k T;\ \ g(T) = \frac{T}{\ln^k T};\ \ g(T) = \int\limits_2^T \frac{1}{\ln^k \tau} d\tau,\ k > 0 \tag{3.5}$$

Считаем $T > 1$ для логарифмических функций.

Итак, $\Delta(x,T)$ есть малая величина порядка $g(T)/T$, поэтому имеем равномерную по x оценку (3.1).

Предположим, что имеет место оценка (3.1). Это значит, что

$$\|S(x,T)\| = T\Delta(x,T) = O(g(T)),$$

Таким образом, норма функции $S(x,T)$ удовлетворяет условию полосы (3.3). Переходя к двойному супрерому по $x \in D$ и $T \in [0,\infty]$, получим $\Lambda^* = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В заключении отметим, что мы можем получить оценку малости функции $\delta(\varepsilon)$ в случае $\Lambda^* = \infty$. Действительно, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \frac{1}{\Lambda^*} = 0,$$

поэтому $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$. Можем уточнить эту оценку, исходя из свойств медленного среднего. Для этого равномерное по x равенство (3.1) представим в виде

$$J(x, h/\varepsilon) \stackrel{def}{=} \sup_{x\in D} \left\| \frac{\varepsilon}{h} \int\limits_0^{h/\varepsilon} \widetilde{X}\,(x,\tau)\, d\tau \right\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} g\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right)$$

Учитывая, что

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{0\leqslant h\leqslant L} hJ\left(\frac{h}{\varepsilon}\right),$$

получим

$$\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon g\left(\frac{h^*}{\varepsilon}\right)\right),$$

где h^* – внутренная точка интервала $[0,L]$, в которой достигается значение супремума. Используя вид функций $g(T)$ (см. формулы (3.5)), имеем одно из возможных представлений $\delta(\varepsilon)$ (считаем, без ограничения общности, что $h^* = 1$):

$$\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{1-\alpha}\right), 0 < \alpha < 1; \quad \delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon \ln^k(1/\varepsilon)\right); \quad \delta(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{|\ln^k \varepsilon|}\right),\ k > 0 \tag{3.6}$$

4. Гипотеза Волосова В.М.

Используя полученные выше оценки малости функции $\delta(\varepsilon)$, можем уточнить оценку точности приближения (2.2) в теореме Боголюбова для случая произвольной зависимости правых частей от времени.

Если равномерное среднее сходится быстро, то имеем

$$\|x(t,\varepsilon) - u(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, 2L\, \sqrt{2\lambda M}\, e^{\lambda L}$$

Для медленного среднего оценка точности приближения (2.2) сохраняется, при этом $\delta(\varepsilon)$ сравнима по порядку малости с величиной $(\varepsilon g\,(1/\varepsilon))$ и, как следствие, может совпадать с одной из явных формул (3.6).

Заметим, эти оценки не являются наилучшими. В работах [9], [11] утверждается, что в случая быстрой сходимости временного среднего точность приближения есть величина порядка ε. Однако строгое доказательство этого факта отсутсвует. Поэтому следующее утверждение, дополненное предположением о точности приближения в случае медленной сходимости среднего, будем называть гипотезой Волосова.

Гипотеза Волосова В.М. *Если для дифференциальных уравнений* (1.1) *выполнены условия* (1) – (4) *теоремы Боголюбова, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, при этом временное среднее сходится быстро, то точность приближения метода усреднения будет величиной порядка* ε.

Если временное среднее сходится медленно, то точность приближения – величина порядка $\delta(\varepsilon)$, $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$.

Докажем гипотезу при дополнительных ограничениях на правую часть.

Теорема 4.1. *Предположим, что выполняются условия* (1)–(4) *теоремы Боголюбова, при этом равномерно ограничены первые производные* $X'_x(x,t)$, $S'_u(u,t)$, *а также вторые производные от* $X(x,t)$ *по* x, *когда* $0 \leqslant t < \infty$, $x, u \in D$. *Пусть* $x(t)$, $u(t)$ – *решения уравнений* (1.1) *и* (1.2) *соответственно, определеннные при* $0 \leqslant t < \infty$, $\rho > 0$ – *произвольное малое число такое, что на промежутке времени* $0 \leqslant t < \infty$ *решение* $u(t)$ *принадлежит вместе с* ρ – *окрестностью области* D, $L > 0$ – *произвольно большое число. Тогда существует* $\varepsilon_0(\rho)$ *и константа* C *такие, что для всякого* ε *из интервала* $(0, \varepsilon_0)$ *и при* $0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon$ *справедливы следующие оценки точности приближения.*

1. *Пусть* $\Lambda^* < \infty$, *тогда точность приближения – величина порядка* ε:

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant \varepsilon\left(CLe^{\lambda L} + \Lambda^*\right), \quad \lambda = n \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant t<\infty} \|X'_x(x,t)\|$$

2. *Если* $\Lambda^* = \infty$, *оценка точности приближения ухудшается:*

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant \delta(\varepsilon)\left(\lambda L n^{-1} e^{\lambda L} + 1\right), \quad \varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$$

Доказательство. Рассмотрим, наряду с $u(t)$, “улучшенное” решение $z(t)$ усредненных уравнений (1.2):

$$z(t) = u(t) + \varepsilon S(u(t), t)$$

Дифференцируем это равенство по t, принимая во внимание определение $S(u,t)$:

$$\begin{aligned}\dot z &= \dot u + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial u}\dot u = \varepsilon\overline{X}(u) + \varepsilon\widetilde{X}(u,t) + \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial u}\overline{X}(u) = \\ &= \varepsilon X(u,t) + \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial u}\overline{X}(u)\end{aligned}$$

Дополним это равенство соотношением

$$\dot x = \varepsilon X(x,t)$$

Если теперь вычесть из него предыдущее равенство, получим

$$\dot x - \dot z = \varepsilon X(x,t) - \varepsilon X(z,t) + G(u,t),$$

где

$$G(u,t) = \varepsilon X(z,t) - \varepsilon X(u,t) - \varepsilon^2 \frac{\partial S}{\partial u}\overline{X}(u)$$

Интегрируя это равенство в пределах от нуля до t, имеем

$$\|x(t) - z(t)\| \leqslant \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \|x(\tau) - z(\tau)\| d\tau + \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\|$$

Здесь λ – константа Липшица, имеющая, в силу ограниченности первых производных, вид

$$\lambda = n \sup_{x\in D} \sup_{0\leqslant t<\infty} \|X'_x(x,t)\|$$

Отсюда следует, на основе леммы Гроноулла, что на промежутке времени $[0, L/\varepsilon]$ точность приближения описывается неравенством

$$\|x(t) - z(t)\| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant L/\varepsilon} \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\| e^{\lambda L}$$

1. Предположим, что $\Lambda^* < \infty$. Упростим первые два члена функции $G(u,t)$:

$$\varepsilon X(z,t) - \varepsilon X(u,t) = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)_0 S(u,t) + O(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

Здесь, при оценки остаточной суммы ряда была использована формула конечных приращений Лагранжа для каждой i - ой компоненты вектора $X(x,t)$ в виде

$$\begin{aligned} &\varepsilon X_i(z,t) - \varepsilon X_i(u,t) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial X_i}{\partial z}\right)_0 S(u,t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2!} d^2 X_i(u + \varepsilon\theta S(u,t), t), \quad (dz_i = \varepsilon S_i,\ 0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

где $d^2 X_i$ – квадратичная, биномиальная форма переменных dz_i; использованы также условия равномерной ограниченности $S(u,t)$ (как следствие неравенства $\Lambda^* < \infty$) и вторых производных по z от функции $X(z,t)$. Тогда имеем:

$$G(u,t) = \varepsilon^2 G^*(u,t) + O(\varepsilon^3)$$

где

$$G^*(u,t) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 S(u,t) - \frac{\partial S}{\partial u}(u,t)\overline{X}(u)$$

В силу условий теоремы функция $G^*(u,t)$ равномерно ограничено сверху некоторой константой C, поэтому, отбрасывая члены третьего порядка малости, имеем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant L/\varepsilon} \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\| \leqslant \varepsilon C L$$

Отсюда следует, что

$$\Big| \|x(t) - u(t)\| - \|\varepsilon S(u(t),t)\| \Big| \leqslant \|x(t) - u(t) - \varepsilon S(u(t),t)\| \leqslant \varepsilon C L e^{\lambda L},$$

т.е.

$$\|x(t)-u(t)\| \leqslant \varepsilon\left(CLe^{\lambda L}+\Lambda^*\right)$$

2. Рассмотрим случай $\Lambda^*=\infty$. Функция $S(u,t)$ неограничена, однако на промежутке времени $[0,L/\varepsilon]$ норма $\varepsilon\|S(u,t)\|$ имеет порядок малости, равный $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\Lambda(\varepsilon)$, т.к.

$$0\leqslant\varepsilon\|S(u,t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

Поэтому предыдущие рассуждения сохраняют силу, но требуют уточнения. Так, в формуле (4.1) символ $O(\varepsilon^3)$ следует заменить на $O(\varepsilon^2\delta(\varepsilon))$, тогда $G(u,t)$ предстанет в виде

$$G(u,t)=\varepsilon^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0(u,t)S(u,t)-\varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial u}(u,t)(u,t)\overline{X}(u)+O(\varepsilon^2\delta(\varepsilon))$$

Первый член правой части имеет порядок малости $\varepsilon\delta(\varepsilon)$, второй – ε^2, третий – $\varepsilon^2\delta(\varepsilon)$. Следовательно, второй и третий члены – величины более высокого порядка малости по сравнению с первым, так как $\varepsilon=o(\delta(\varepsilon))$. Отбрасывая их, имеем

$$\|G(t)\|\leqslant\varepsilon\lambda\delta(\varepsilon)n^{-1}$$

Тогда, на асимптотически большем промежутке времени $[0,L/\varepsilon]$ норма разности решений $u(t)$, $z(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)-z(t)\|\leqslant n^{-1}\delta(\varepsilon)\lambda Le^{\lambda L}$$

и, следовательно,

$$\|x(t)-u(t)\|\leqslant\|x(t)-z(t)\|+\varepsilon\|S(u,t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)\left(\lambda Ln^{-1}e^{\lambda L}+1\right)$$

Доказательство закончено.

Как следует из выше приведенных представлений функции $\delta(\varepsilon)$, возможные оценки точности приближения в случае медленной сходимости временного среднего имеют вид

$$\begin{aligned}
&\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\sim\varepsilon^{(1-\alpha)},\ 0<\alpha<1;\\
&\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\sim\varepsilon\ln^k(1/\varepsilon);\\
&\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\sim\frac{1}{|\ln^k\varepsilon|};\\
&\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\|\sim\varepsilon\int\limits_2^{\varepsilon^{-1}}\frac{1}{\ln^k\tau}d\tau,\ \ k>0
\end{aligned}$$

Доказанная теорема утверждает, что в случае быстрой сходимости временного среднего точность приближения есть величина порядка ε, если выполняются некоторые дополнительные условия. Наиболее обременительным из них является условие равномерной ограниченности производной $S'_u(u,t)$. Это условие выполняется, когда функция $X(x,t)$ квази-периодична с постоянным вектором частот $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)$, представима конечным рядом Фурье, отсутствуют резонансы, область D компактна. Тогда $\Lambda^*<\infty$, при этом

$$\|S'_u(u,T)\|\leqslant\sum_{\|k\|=1}^{m}\left\|\frac{X_u'^{(k)}(u)}{(k,\omega)}\right\|<\infty$$

Здесь $X^{(k)}(u)$ – коэффициенты ряда Фурье функции $X(x,t)$.

Равномерная ограниченность производной $S'_u(u,T)$ сохраняется и в том случае, когда ряд Фурье бесконечен, отсутствуют резонансы и $\Lambda^* < \infty$. Действительно, условие $\Lambda^* < \infty$ гарантирует, в силу теоремы Бора, квази-периодичность интеграла $S(u,T)$ при любом $u \in D$. Тогда функция $S'_u(u,T)$ квази-периодична и, следовательно, равномерно ограничена. Равномерно ограничены также производные $X'_x(x,t)$, $X'_{xx}(x,t)$ при $x \in D$.

Следствие 4.1. *Предположим, что функция $X(x,t)$ квази-периодична с постоянным вектором частот, отсутствуют резонансы, при этом $\Lambda^* < \infty$. Тогда точность приближения метода усреднения есть величина порядка ε.*

В заключении отметим, что проблема построения явных оценок точности приближения в методе усреднения открыта, так как не доказана гипотеза Волосова во всей полноте.

Благодарность.

Автор признателен проф. Косенко И.И. за помощь в исследованиях: связь между параметром $\Lambda^* < \infty$ и быстрым временным средним была указана Косенко И.И. в частной беседе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте.

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИФМЛ, М., 1963.

2. Гихман И.И., “По поводу одной теоремы Н.Н. Боголюбова”, *Укр. матем. журнал*, 1952, №4, 215-219.

3. Красносельский М.А., Крейн С.Г., “О принципе усреднения в нелинейной механике”, *УМН*, **10**:3(65) (1955), 147–152.

4. Новожилов И.В., *Фракционный анализ*, Изд-во МГУ, М., 1995.

5. Жарков В. Н., *Внутреннее строение Земли и планет.*, Наука, М., 1983.

6. Roseau M., *Vibrations non Linéaires et théorie de la stabilité*, Springer, Verlag-Berlin-Heidelberg, 1966.

7. Besjes J.G., “On the asymptotic methods for non-linear differential equations”, *Jornal de Mécanique*, **8**:3 (1969), 357–372.

8. Красильников П.С., “О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании”, *ППМ*, **76**:1 (2012), 36-51.

9. Волосов В.М., “Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений”, *УМН*, 1962, №6(108), 3-126.

10. Пуанкаре А., *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ГИТТЛ, М.-Л., 1947.

11. Волосов, Моргунов Б.И., *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*, Изд-во МГУ, М., 1971.

On explicit estimates of the approximation accuracy in first Bogolyubov's theorem

© **Krasil'nikov P.S.**[2]

Abstract. The problem of explicit estimates for the approximation accuracy in the averaging method of Bogolyubov standard systems is investigated. It is shown that estimates depends on some parameter Λ^*, which affects the convergence of the time average. We formulate a statement on the explicit estimates for the approximation accuracy (Volosov's hypothesis). Hypothesis is proved under some additional restrictions on the right-hand side of differential equations.

Key Words: time average, the accuracy of the approximation, the averaging method

[2] Head of Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; krasil06@rambler.ru.