

УДК 517.956.223:537.213

Математическое моделирование электростатического взаимодействия двух одинаковых сфер, окруженных ДЭС

© А. О. Сыромясов¹, Н. В. Еремкина²

Аннотация. Найдено распределение электрического потенциала в среде с двумя одинаковыми неподвижными сферическими частицами, которые окружены широкими двойными электрическими слоями. Решение получено с использованием теории нелинейных тензорных функций тензорного аргумента и может быть обобщено на произвольное количество сферических частиц.

Ключевые слова: двойной электрический слой, уравнение Пуассона – Больцмана, уравнение Гельмгольца, мультиполь, асимптотические методы, теория нелинейных тензорных функций тензорного аргумента

1. Введение

В последние годы исследование взаимодействия взвешенных частиц в сплошной среде становится все более актуальным. Это связано с тем, что чистые вещества, в отличие от различных дисперсных систем, в природе и в технике встречаются редко [8].

Данные системы можно изучать экспериментально, что связано с большими затратами. В связи с этим для исследования дисперсных сред широко применяется математическое моделирование. Оно не исключает необходимость натуральных исследований, однако позволяет значительно снизить потребность в проведении экспериментов, что влечет за собой экономию времени и денежных средств.

Между частицами, взвешенными в среде, может возникать электростатическое взаимодействие. Как правило, оно происходит опосредованно – при перекрытии двойных электрических слоев (ДЭС), образующихся вокруг частиц взвеси. Описание ДЭС приводит к системе нелинейных уравнений в частных производных [5], для упрощения которой выдвигаются те или иные дополнительные предположения.

Так, если среда представляет собой сильный электролит, то двойные слои вокруг частиц являются относительно тонкими [1]. В этом случае сначала решается задача о распределении электрического потенциала вблизи одиночной частицы, а взаимодействие сводится к возникновению расклинивающего давления в зоне слабого перекрытия слоев [2].

С практической точки зрения интересен и противоположный вариант: несущая среда представляет собой слабый электролит (таковы, например, многие органические вещества). В этом случае двойные слои вокруг частиц весьма широки, а описывающие их уравнения линеаризуются [9]. Вследствие большой протяженности ДЭС совершенно недостаточно описывать электрическое поле в окрестности каждой частицы по отдельности. Необходимо решать задачу о распределении потенциала с граничными условиями на поверхности многих частиц одновременно.

Цель настоящей работы – исследование математической модели взаимодействия двух одинаковых неподвижных сферических частиц в сплошной среде, окруженных широкими

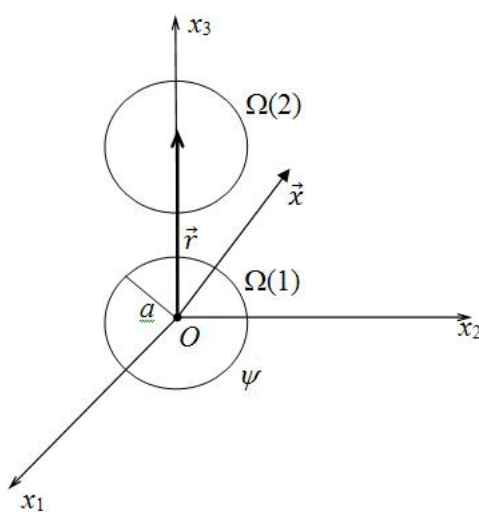
¹ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск, syall1@yandex.ru

² Студент факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск

ДЭС. Решение задачи о взаимодействии представлено в виде разложения по базисным функциям. Для поиска коэффициентов разложения применены асимптотические методы, а также теория нелинейных тензорных функций тензорного аргумента [3].

2. Постановка задачи

Рассматривается неподвижная сплошная среда, в которой расположены две неподвижные сферические частицы $\Omega(1)$ и $\Omega(2)$ радиуса a . Вектор \vec{r} длины $r = |\vec{r}|$ соединяет центры частиц. Для удобства введем декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре первой частицы и осью Ox_3 , сонаправленной с \vec{r} . Обозначим единичные орты координатных осей через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, соответственно. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает положение произвольной точки пространства относительно центра первой частицы, а вектор $\vec{x} - \vec{r}$ – относительно центра второй (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Искомой величиной является потенциал ψ электрического поля в среде. Вне частиц он удовлетворяет линеаризованному уравнению Пуассона – Больцмана (уравнению Гельмгольца):

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi. \tag{2.1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа. Величина κ^{-1} есть характерная толщина двойного слоя [9].

На поверхности каждой из частиц потенциал постоянен и равен ψ_a , вдали от частиц он стремится к нулю:

$$\begin{aligned} \psi|_{\partial\Omega(1)} = \psi|_{\partial\Omega(2)} = \psi_a, \\ \psi \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Задача состоит в отыскании функции $\psi(\vec{x})$, удовлетворяющей уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2).

3. Метод решения

Хорошо известно обращающееся в нуль на бесконечности решение уравнения (2.1), обладающее сферической симметрией:

$$\psi = C_0 \Lambda_0, \quad (3.1)$$

где зависящий от \vec{x} мультиполь определяется как

$$\Lambda_0(\vec{x}) = \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}, \quad (3.2)$$

а константа C_0 находится из граничных условий. Если потенциал принимает значение ψ_a при $|\vec{x}| = a$, то

$$C_0 = a\psi_a e^{\kappa a}. \quad (3.3)$$

Для отыскания распределения потенциала вокруг двух частиц было бы логично использовать бисферическую систему координат; подобный подход применяется, например, при решении уравнения Лапласа с граничными условиями на двух сферических поверхностях. Однако известно, что в уравнении Гельмгольца переход к бисферическим координатам не приводит к разделению переменных [6]. Кроме того, с помощью одного и того же метода хотелось бы моделировать взаимодействие произвольного конечного числа частиц. Поэтому использование системы координат, в которой координатные изоповерхности совпадают с границами лишь *двух* частиц, не может решить задачу.

В связи с вышеизложенным для моделирования парного электростатического взаимодействия частиц взвеси обобщим выражение (3.1). Подробнее, в решение следует включить мультиполи, зависящие не только от \vec{x} , но и от $\vec{x} - \vec{r}$. Кроме того, функций вида (3.2) не хватает для одновременного удовлетворения всех граничных условий (2.2), поэтому используем в разложении потенциала и мультиполи более высокого порядка:

$$\begin{aligned} \psi = & C_0(1)\Lambda(\vec{x}) + C_j(1)\Lambda_j(\vec{x}) + C_{jk}(1)\Lambda_{jk}(\vec{x}) + C_{jkl}(1)\Lambda_{jkl}(\vec{x}) + \dots + \\ & + C_0(2)\Lambda(\vec{x} - \vec{r}) + C_j(2)\Lambda_j(\vec{x} - \vec{r}) + C_{jk}(2)\Lambda_{jk}(\vec{x} - \vec{r}) + C_{jkl}(1)\Lambda_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}) \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь и далее применяется соглашение Эйнштейна: по повторяющимся буквенным индексам производится свертка – суммирование в пределах от 1 до 3. Мультиполи высших порядков определяются равенствами

$$\Lambda_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \Lambda_0(\vec{x}) \quad (3.5)$$

и являются решениями (2.1), стремящимися к нулю при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Ряд (3.4) бесконечен; ранг мультиполя, на котором будет оборвана сумма, зависит от выбранной точности. Постоянные тензорные коэффициенты $\vec{C}(N)$ следует найти из условий (2.2). Здесь и далее $N = 1, 2$ означает номер частицы.

С увеличением точности разложения и ранга мультиполей число компонент $C_{j\dots k}(N)$ растет со скоростью геометрической прогрессии: так, тензор четвертого ранга имеет $3^4 = 81$ компоненту. Уменьшить число неизвестных позволяет такое соображение. Согласно (3.4), $C_{j\dots k}(N)$ сворачиваются с мультиполями, которые по определению (3.5) симметричны. Поэтому и сами $C_{j\dots k}(N)$ также симметричны по всем своим индексам.

Для дальнейших упрощений используется теория нелинейных тензорных функций [3].

Решение задачи (2.1)–(2.2) должно иметь ту же симметрию, что и граничные условия. Но для них Ox_3 служит поворотной осью бесконечного порядка, через которую проходят

две зеркальные плоскости Ox_1x_3 и Ox_2x_3 . Эти элементы симметрии отвечают группе $\infty \cdot m$ (в обозначениях Шубникова), базисом которой служат $\vec{b} = \vec{e}_3$ и $\vec{\delta} = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2$. Произведения векторов на себя понимаются как тензорные, а компоненты $\vec{\delta}$ суть символы Кронекера δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С учетом симметрии по индексам тензорные коэффициенты, разложенные по такому базису, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} C_i(N) &= A(N)b_i, \\ C_{ij}(N) &= B(N)\delta_{ij} + D(N)b_ib_j, \\ C_{ijk}(N) &= E(N)(\delta_{ij}b_k + \delta_{ik}b_j + \delta_{jk}b_i) + F(N)b_ib_jb_k, \\ C_{ijkl}(N) &= G(N)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + H(N)(\delta_{ij}b_kb_l + \delta_{ik}b_jb_l + \delta_{il}b_jb_k + \delta_{jk}b_ib_l + \\ &+ \delta_{jl}b_ib_k + \delta_{kl}b_ib_j) + K(N)b_ib_jb_kb_l, \dots \end{aligned}$$

Поскольку мультиполи $\Lambda_{j\dots k}$ удовлетворяют уравнению (2.1), справедливы равенства:

$$\delta_{lm}\Lambda_{j\dots klm} = \kappa^2\Lambda_{j\dots k}.$$

Следовательно, слагаемые, содержащие символ Кронекера, не дают принципиально нового вклада в сумму (3.4). Поэтому можно считать, что

$$C_i(N) = CB(N)b_i, \quad C_{ij}(N) = CC(N)b_ib_j, \quad C_{ijk}(N) = CD(N)b_ib_jb_k, \dots$$

Тогда формула (3.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \psi &= C_0(1)\Lambda_0(\vec{x}) + CB(1)\Lambda_3(\vec{x}) + CC(1)\Lambda_{33}(\vec{x}) + CD(1)\Lambda_{333}(\vec{x}) + CE(1)\Lambda_{3333}(\vec{x}) + \\ &+ CF(1)\Lambda_{33333}(\vec{x}) + CG(1)\Lambda_{333333}(\vec{x}) + CH(1)\Lambda_{3333333}(\vec{x}) + \dots \\ &+ C_0(2)\Lambda_0(\vec{x} - \vec{r}) + CB(2)\Lambda_3(\vec{x} - \vec{r}) + CC(2)\Lambda_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \\ &+ CD(2)\Lambda_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + CE(2)\Lambda_{3333}(\vec{x} - \vec{r}) + CF(2)\Lambda_{33333}(\vec{x} - \vec{r}) + \\ &+ CG(2)\Lambda_{333333}(\vec{x} - \vec{r}) + CH(2)\Lambda_{3333333}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отметим, что такой же подход (разложение решения по базисным функциям и использование теории нелинейных тензорных функций для построения коэффициентов разложения) может быть использован для описания двойных электрических слоев вокруг частиц, образующих периодическую решетку [7].

Неизвестными в (3.6) остаются лишь скалярные функции $C_0(N)$, $CB(N)$, $CC(N)$ и т.д. Будем искать их в виде разложения по целым неотрицательным степеням двух малых безразмерных параметров

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad \delta = \kappa r = \frac{r}{\kappa^{-1}}, \tag{3.7}$$

где ε отвечает за относительную удаленность частиц друг от друга, а δ – за относительную толщину ДЭС по сравнению с межчастичным расстоянием. Поскольку $\delta < 1$, двойные электрические слои весьма широки.

Например, $C_0(N)$ раскладывается по степеням этих параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} C_0(N) &= C_{000}(N) + C_{001}(N)\delta + C_{002}(N)\delta^2 + C_{003}(N)\delta^3 + C_{004}\delta^4 + \dots \\ &+ C_{010}(N)\varepsilon + C_{011}(N)\varepsilon\delta + C_{002}(N)\varepsilon\delta^2 + C_{003}(N)\varepsilon\delta^3 + C_{004}\varepsilon\delta^4 + \dots \\ &+ C_{020}(N)\varepsilon^2 + C_{021}(N)\varepsilon^2\delta + C_{022}(N)\varepsilon^2\delta^2 + C_{023}(N)\varepsilon^2\delta^3 + C_{024}\varepsilon^2\delta^4 + \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что $C_0(N)$ – единственные скалярные функции, разложение которых начинается с выражения, содержащего множитель $\varepsilon^0\delta^0$. Это позволяет при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ осуществлять переход к решению задачи об одиночной сфере (3.1)–(3.3).

Для поиска коэффициентов $C_{000}(N)$, $C_{010}(N)$ и им подобных применяется следующий алгоритм.

1. Формула (3.4) подставляется в каждое из условий (2.2) на поверхности частиц. Для большего удобства при использовании соотношения на границе $\Omega(2)$ делается замена $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{r}$. Условие затухания поля вдали от частиц удовлетворяется автоматически благодаря тому, что функции (3.5) на бесконечности обращаются в нуль.
2. Найденные выражения и ψ_a умножаются на $ae^{\kappa a}$ – этот множитель фигурирует в решении задачи об одиночной сфере (3.3) и, судя по всему, будет также присутствовать в решении задачи о двух частицах.
3. В полученных выражениях следует избавиться от степеней координаты x_3 выше первой, а также от величин r , κ . Для этого используются соотношения

$$x_3^2 = a^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad r = \frac{a}{\varepsilon}, \quad \kappa = \frac{\varepsilon\delta}{a}.$$

Первое из них справедливо на поверхности частиц, остальные два получаются из (3.7). Теперь формулы, описывающие распределение потенциала на $\partial\Omega(1)$ и $\partial\Omega(2)$, содержат лишь малые параметры, радиус частиц a , координаты вектора \vec{x} (причем x_3 – не выше, чем в первой степени) и неизвестные скалярные функции $C_0(N)$, $CB(N)$, $CC(N)$ и т.д.

4. Мультиполи и искомые функции раскладываются по степеням малых параметров, при этом для $C_0(N)$, $CB(N)$, ... используются соотношения вида (3.8).
5. Согласно (2.2), каждое из полученных выражений приравнивается к величине

$$\Psi = a\psi_a e^{\kappa a}.$$

Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты $C_{000}(N)$, $C_{001}(N)$, ..., $CB_{010}(N)$ и т.д. Ее решение и является искомым. При повышении выбранной точности количество слагаемых в сумме (3.4) будет увеличиваться, а значит, будет расти и число неизвестных в системе.

Изложенный алгоритм был реализован в системе Wolfram Mathematica.

4. Результаты

Параметры (3.7) независимы, и задача может быть решена при разных соотношениях между ними; при этом предположение об относительном порядке малости параметров должно быть выдвинуто заранее – до разложения искомых величин по их степеням. Нами были рассмотрены три варианта соотношения между ε и δ .

1. Указанные параметры имеют одинаковый порядок: $\varepsilon \sim \delta$. Задача была решена с точностью $O(\sqrt{(\varepsilon^8)^2 + (\delta^8)^2})$. Соответственно, в разложении не включались слагаемые, содержащие множители $\varepsilon^5\delta^4$, $\varepsilon^2\delta^8$ и т.д. – их суммарный порядок малости больше 8.

2. $\delta \sim \epsilon^2$. Задача была решена с точностью $O(\epsilon^8)$. Слагаемые с множителями $\epsilon\delta^4$, $\epsilon^3\delta^3$ и т.п. исключались из рассмотрения, поскольку их порядок малости по ϵ в данном случае превышает 8.
3. Аналогично предыдущему варианту, $\epsilon \sim \delta^2$. В этом случае неизвестные величины были найдены с точностью $O(\delta^8)$.

Вне зависимости от относительного порядка малости безразмерных параметров (3.7) решение задачи обладает следующими свойствами.

Во-первых, при $\epsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ искомое распределение потенциала переходит в распределение вокруг двух невзаимодействующих частиц (3.1)–(3.3): $C_0(1) = C_0(2) = \Psi$, остальные коэффициенты равны 0.

Во-вторых, выполняются соотношения:

$$C_0(2) = C_0(1), CB(2) = -CB(1), CC(2) = CC(1), CD(2) = -CD(1), \dots$$

т.е. значения коэффициентов, соответствующих мультиполям четного порядка, равны, а соответствующих мультиполям нечетного порядка – противоположны. При указанных соотношениях становятся справедливыми равенства

$$\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{r} - \vec{x}).$$

Аналогично [4], это объясняется симметрией изучаемой конфигурации частиц относительно середины отрезка, соединяющего их центры.

При $\epsilon \sim \delta$ искомые разложения таковы:

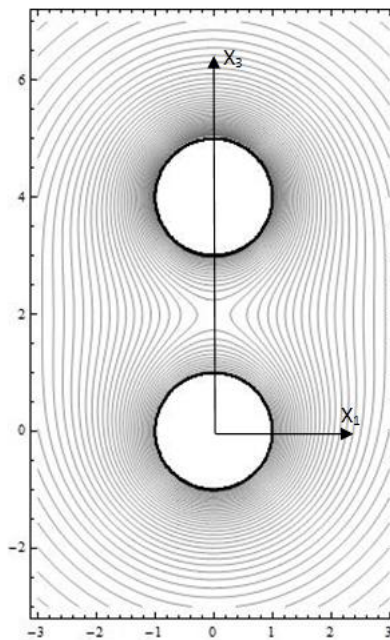
$$\begin{aligned}
 C_0(1) &= \Psi \left(1 - \epsilon + \epsilon\delta - \frac{\epsilon\delta^2}{2} + \frac{\epsilon\delta^3}{6} - \frac{\epsilon\delta^4}{24} + \frac{\epsilon\delta^5}{120} - \frac{\epsilon\delta^6}{720} + \frac{\epsilon\delta^7}{5040} + \epsilon^2 - 3\epsilon^2\delta + 3\epsilon^2\delta^2 - \right. \\
 &\quad - \frac{11\epsilon^2\delta^3}{6} + \frac{5\epsilon^2\delta^4}{6} - \frac{37\epsilon^2\delta^5}{120} + \frac{7\epsilon^2\delta^6}{72} - \epsilon^3 + 5\epsilon^3\delta - \frac{55\epsilon^3\delta^2}{6} + \frac{55\epsilon^3\delta^3}{6} - \\
 &\quad - \frac{51\epsilon^3\delta^4}{8} + \frac{1249\epsilon^3\delta^5}{360} + 2\epsilon^4 - 7\epsilon^4\delta + \frac{55\epsilon^4\delta^2}{3} - \frac{57\epsilon^4\delta^3}{2} + \frac{175\epsilon^4\delta^4}{6} - 3\epsilon^5 + \\
 &\quad \left. + 12\epsilon^5\delta - \frac{97\epsilon^5\delta^2}{3} + \frac{395\epsilon^5\delta^3}{6} + 5\epsilon^6 - 21\epsilon^6\delta + \frac{1783\epsilon^6\delta^2}{30} - 9\epsilon^7 + 37\epsilon^7\delta + 15\epsilon^8 \right), \\
 CB(1) &= \Psi a \left(\epsilon^2 - \frac{\epsilon^2\delta^2}{2} + \frac{\epsilon^2\delta^3}{3} - \frac{\epsilon^2\delta^4}{8} + \frac{\epsilon^2\delta^5}{30} - \frac{\epsilon^2\delta^6}{144} - \epsilon^3 + \epsilon^3\delta - \frac{2\epsilon^3\delta^3}{3} + \frac{2\epsilon^3\delta^4}{3} - \right. \\
 &\quad - \frac{2\epsilon^3\delta^5}{5} + \epsilon^4 - 3\epsilon^4\delta + \frac{31\epsilon^4\delta^2}{10} - \frac{251\epsilon^4\delta^4}{120} - 3\epsilon^5 + 5\epsilon^5\delta - \frac{124\epsilon^5\delta^2}{15} + \frac{94\epsilon^5\delta^3}{15} + \\
 &\quad \left. + 4\epsilon^6 - 9\epsilon^6\delta + \frac{107\epsilon^6\delta^2}{6} - 8\epsilon^7 + 18\epsilon^7\delta + 14\epsilon^8 \right), \\
 CC(1) &= \Psi a^2 \left(-\frac{\epsilon^3}{2} + \frac{\epsilon^3\delta^2}{12} - \frac{\epsilon^3\delta^4}{48} + \frac{\epsilon^3\delta^5}{90} + \frac{\epsilon^4}{2} - \frac{\epsilon^4\delta}{2} + \frac{\epsilon^4\delta^2}{6} - \frac{\epsilon^5}{2} + \frac{3\epsilon^5\delta}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{43\epsilon^5\delta^2}{28} + \frac{2\epsilon^5\delta^3}{3} + 2\epsilon^6 - \frac{5\epsilon^6\delta}{2} + \frac{53\epsilon^6\delta^2}{14} - \frac{5\epsilon^7}{2} + 5\epsilon^7\delta + 6\epsilon^8 \right), \\
 CD(1) &= \Psi a^3 \left(\frac{\epsilon^4}{6} - \frac{\epsilon^4\delta^2}{60} + \frac{\epsilon^4\delta^4}{720} - \frac{\epsilon^5}{6} + \frac{\epsilon^5\delta}{6} - \frac{\epsilon^5\delta^2}{15} + \frac{\epsilon^5\delta^3}{90} + \frac{\epsilon^6}{6} - \frac{\epsilon^6\delta}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{55\epsilon^6\delta^2}{108} - \frac{5\epsilon^7}{6} + \frac{5\epsilon^7\delta}{6} + \epsilon^8 \right),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
CE(1) &= \Psi a^4 \left(-\frac{\varepsilon^5}{24} + \frac{\varepsilon^5 \delta^2}{336} + \frac{\varepsilon^6}{24} - \frac{\varepsilon^6 \delta}{24} + \frac{\varepsilon^6 \delta^2}{56} - \frac{\varepsilon^7}{24} + \frac{\varepsilon^7 \delta}{8} + \frac{\varepsilon^8}{4} \right), \\
CF(1) &= \Psi a^5 \left(\frac{\varepsilon^6}{120} - \frac{\varepsilon^6 \delta^2}{2160} - \frac{\varepsilon^7}{120} + \frac{\varepsilon^7 \delta}{120} + \frac{\varepsilon^8}{120} \right), \\
CG(1) &= \Psi a^6 \left(-\frac{\varepsilon^7}{720} + \frac{\varepsilon^8}{720} \right), \\
CH(1) &= \frac{a^7 \varepsilon^8}{5040} \Psi.
\end{aligned}$$

Решение в Wolfram Mathematica показало, что при $\delta \sim \varepsilon^2$ или $\varepsilon \sim \delta^2$ разложения скалярных функций отличаются от приведенных выше только исключением слагаемых более высокого порядка, как это и предполагалось ранее. Например, при $\delta \sim \varepsilon^2$ разложение $CF(1)$ имеет вид:

$$CF_0(1) = \Psi a^5 \left(\frac{\varepsilon^6}{120} - \frac{\varepsilon^7}{120} + \frac{\varepsilon^8}{120} \right).$$

На рис. 4.1 изображены эквипотенциальные линии функции ψ в плоскости Ox_1x_3 . При их построении были использованы выражения (3.6) и (4.1), причем значения параметров составляли $\Psi = 1$, $\varepsilon = 1/4$, $\delta = 1/3$, $a = 1$.



Р и с у н о к 4.1

Как видно, распределение потенциала симметрично относительно плоскости Ox_2x_3 (ось Ox_3 на рисунке). Плоскость $x_3 = r/2$ также является зеркальной.

5. Заключение

В статье представлен метод решения задачи о распределении электрического потенциала вокруг сферических частиц, внедренных в сплошную среду. Этот метод включает в себя следующие этапы:

- Разложение искомого решения уравнения (2.1) по базисным функциям. При этом все такие функции (мультиполи) суть частные производные некоторого «фундамен-

тального» решения, имеющего простую структуру (обладающего сферической симметрией). Это возможно сделать, поскольку указанное уравнение является линейным с постоянными коэффициентами.

- Привлечение теории нелинейных тензорных функций и использование симметрии граничных условий задачи для построения тензорных коэффициентов разложения. В результате задача сводится к отысканию скалярных функций, фигурирующих в выражении коэффициентов, через тензоры базиса.
- Для отыскания скалярных функций мультиполи в окрестности каждой частицы раскладываются в ряд по малым параметрам (3.7). Эти асимптотические ряды подставляются в граничные условия задачи, после чего скалярные функции также находятся в виде ряда по степеням малых параметров.

Изложенный метод был применен для решения задачи о двух идентичных частицах, при этом были рассмотрены разные варианты соотношения между фигурирующими в асимптотических разложениях параметрами ε и δ .

Однако такой же подход позволит описывать двойные электрические слои вокруг произвольного конечного числа сферических частиц (быть может, разных радиусов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерягин Б., Ландау Л., “Теория устойчивости сильно заряженных лиофобных золь и слипания сильно заряженных частиц в растворах электролитов”, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **15:11** (1945), 663–681.
2. Духин С. С., Дерягин Б. В., Семенихин Н. М., “Взаимодействие двух идентичных сферических коллоидных частиц на больших расстояниях”, *Докл. АН СССР*, **192:2** (1970), 357–360.
3. Лохин В. В., Седов Л. И., “Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов”, *Прикладная математика и механика*, **27:3** (1963), 393–417.
4. Мартынов С. И., *Взаимодействие частиц в суспензии*, Издательство Казан. матем. общества, Казань, 1998, 135 с.
5. Остроумов Г. А., *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., 1979, 320 с.
6. Полянин А. Д., *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.
7. Сыромясов А. О., “Электрогидродинамика структурированной суспензии”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **8:1** (2006), 301–306.
8. Фридрихсберг Д. А., *Курс коллоидной химии*, изд. 4, испр. и доп., Лань, СПб., 2010, 416 с.
9. Verwey E. J. W., Overbeek J. Th. G., *Theory of the stability of lyophobic colloids*, Elsevier publishing company, Inc., New York – Amsterdam – London – Brussels, 1948, i–xii, 1–205 pp.

Mathematical modelling of electrostatic interaction among two identical spheres surrounded by double electric layers

© A. O. Syromyasov³, N. V. Eremkina⁴

Abstract. The distribution of electric potential in a medium containing two identical spherical particles surrounded by wide double electric layers is discussed. The solution is obtained by using the theory of nonlinear tensor functions and may be generalized on the arbitrary number of particles.

Key Words: double electric layer, Poisson – Boltzmann equation, Helmholtz equation, multipole, asymptotic methods, theory of nonlinear tensor functions

³ Associate professor, Department of Applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk, syall@yandex.ru

⁴ Student, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Ogarev Mordovia State University, Saransk