УДК 517.9+519.8

Математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем

© Ю. А. Кузнецов [1], Е. В Круглов [2], Д. А. Бурлакова [3]

Аннотация. В работе рассматривается дискретная математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса. Её исследование сводится к изучению трехмерной динамической системы с дискретным временем. Определяются условия существования единственной траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: модели экономического роста с учетом человеческого капитала, трехмерные динамические системы с дискретным временем, траектории сбалансированного роста

1. Введение

В теории экономического роста принято выделять некоторый набор так называемых *стилизованных фактов* (*stylized facts*) современного экономического роста – набор тенденций и закономерностей, типичных для современной экономической динамики. К их числу относится и следующий факт: в обеспечении высоких темпов экономического роста важную роль играют как *научно-технологический прогресс*, так и *образование и уровень квалификации рабочей силы* (см. подробнее [2], [20], [14]).

Следует отметить, что роль уровня квалификации рабочей силы отмечалась ещё классиками экономической теории (А. Смит, Ж.Б. Сэй, Дж.С. Милль, Л. Вальрас, А. Пигу и др.). В явном и теперь уже общепринятом виде концепция человеческого капитала вошла в экономическую науку только в 60-х годах XX столетия благодаря работам Дж. Минцера, Т. Шульца, Г. Беккера и М. Блауга. Первоначально в теории экономического роста в качестве основных рассматривались лишь такие экономические факторы, как *физический капитал* и *трудовые ресурсы* (в действительности – *численность* занятых в производстве работников).

В настоящее время одним из самых существенных *факторов экономического роста* считается *человеческий капитал*. По существу человеческий капитал представляет собой совокупность накопленных профессиональных *знаний, умений и навыков*, получаемых в процессе образования и повышения квалификации, которые впоследствии могут приносить доход – в виде заработной платы, процента или прибыли. Его передача осуществляется с помощью (относительно длительного) процесса *обучения и(или) практик*, призванных транслировать специфические знания и демонстрировать процедуры выработки новых навыков. Человеческий капитал носит ярко выраженный *индивидуальный* характер и *изначально* он воплощен в *отдельной* человеческой личности, а совокупный запас человеческого капитала в том или ином сообществе равен сумме запасов всех входящих в него индивидуумов.

[1] Заведующий кафедрой математического моделированя экономических процессов, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; Yu-Kuzn@mm.unn.ru.

[2] Доцент кафедры математического моделированя экономических процессов, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kruglov19@mail.ru.

[3] Аспирант, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; groha@yandex.ru.

В современной теории экономического роста человеческий капитал рассматривается как важный фактор экономического роста и развития, а механизм его производства и накопления – как существенная часть *эндогенных математических моделей экономического роста.* Начиная с работ классиков, рассматриваются различные пути (механизмы) формирования и накопления человеческого капитала. Важнейшие концепции, описывающие влияние человеческого капитала и научно-технологического прогресса (НТП) на динамику экономических систем, восходят к работам К. Эрроу, П. Ромера, Р. Нельсона – Э. Фелпса, Х. Узава и Р. Лукаса (см. подробнее [2], [14], [15], [16], [17], [18], [19]).

По-видимому, впервые концепция человеческого капитала была включена в модель экономического роста в классической статье К. Эрроу [1]. В его модели рост технического знания был «непреднамеренным» (то есть *побочным, by-product*) последствием опыта создания новых средств производства, а механизм накопления человеческого капитала включает в себя обучение работников без отрыва от производства (*«learning-by-doing»*).

Другой механизм накопления человеческого капитала описан в общетеоретическом плане Г. Беккером и связан с повышением квалификации работников путем их обучения *«с отрывом от производства»*. Впервые эта концепция накопления человеческого капитала была включена в неоклассическую модель экономического роста в известной (и тоже считающейся классической) работе Р. Лукаса [9]. Подробнее об этой модели и её обобщениях см., например, в работах [2], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19]. Подчеркнем, что в работе Р. Лукаса [9] строится математическая модель с *непрерывным* временем.

В последнее десятилетие были предприняты попытки рассмотрения аналога модели Лукаса с *дискретным* временем (см., например, [7], [6], [3], [8]). Мотивацией для построения подобных моделей выступает желание получить модель, сохраняющую известные и экономически оправданные качественные особенности исходной модели Лукаса, и, кроме того, такую, которую проще и удобнее сопоставлять с данными экономической статистики (то есть с соответствующими временными рядами).

Заметим, что важнейшие математические модели экономического роста, связанные с понятием человеческого капитала, в действительности в той или иной степени отождествляют человеческий капитал с той его компонентой, которая характеризует (в широком смысле) *эффективность* труда экономического агента, или даже (более узко) его *производительность* труда.

В настоящей работе рассматривается общая математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса с дискретным временем. Её исследование сводится к изучению трехмерной динамической системы с дискретным временем. Определяются условия существования единственной траектории сбалансированного роста. Исследуются качественные особенности фазового пространства системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-01-04604).

2. Постановка задачи

Процедура построения математической модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем в основном следует логике работы [9]. Следуя традиции (см. [9]), выделим в явном виде *«внутренний»* и *«внешний»* эффекты процесса накопления человеческого капитала. Внутренний эффект этого процесса определяет рост *индивидуальной* эффективности труда «репрезентативного экономического агента»(ЭА); внешний эффект – связан с организационными и социальными аспектами производственной деятельности, на которые не могут повлиять индивидуальные решения ЭА о накоплении своего человеческого капитала. Этим эффектом определяются «экстерналии». Как и в работе [9], ограничимся рассмотрением простейшего (и вместе с тем – одного из важнейших) случая, когда производственная функция является функцией типа Кобба – Дугласа, а экстерналии учитываются в мультипликативной форме. Поскольку речь идет о выявлении роли процесса накопления человеческого капитала, а не роста численности работников, естественно ограничиться случаем постоянной численности рабочей силы, то есть считать, что её темп роста равен нулю. В итоге уравнения динамики запишутся в виде:

$$k_{t+1} = Ak_t^{\beta}(u_t h_t)^{1-\beta}\bar{h}_t^{\gamma} - c_t + (1-\delta_k)k_t, \tag{2.1}$$

$$h_{t+1} = \delta(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t. \tag{2.2}$$

Здесь t – номер временного периода, $t \geq 0$; $k_t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$ – удельный (*per capita*) физический капитал, приходящийся в среднем на одного ЭА; $h_t \in \mathbb{R}_+$ – уровень человеческого капитала ЭА; u_t – доля активного времени ЭА, отводимая трудовой деятельности; c_t – уровень потребления ЭА; δ_k и δ_h – соответственно коэффициенты выведения (*depreciation rate*) физического и человеческого капиталов, $\delta_k \in (0,1)$, $\delta_h \in (0,1)$; $\delta > 0$, $A > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > 0$ – постоянные, характеризующие процесс накопления человеческого капитала и технологические особенности производства. Множитель $\bar{h}_t^{\gamma}$ описывает экстерналии.

Вообще говоря, ЭА при планировании своей деятельности исходит из восприятия экстерналий как заданных (и известных) функций времени. При этом он выбирает свою стратегию из условия максимизации суммарной дисконтированной полезности

$$J[u,c] = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \to max. \tag{2.3}$$

Здесь $\sigma > 0$ ($\sigma \neq 1$) и $\rho \in (0,1)$ – постоянные, характеризующие особенности поведения ЭА. Функции $c(t) \in \mathbb{R}_+$ и $u(t) \in [0,1]$ являются управлениями.

Форма оптимизационной задачи (2.1), (2.2), (2.3) является вполне традиционной для математической теории экономического роста. Адекватный для исследования этой задачи (а также и более общих задач) математический аппарат достаточно подробно представлен в работах [4], [11], [5], [2] и [14]. Там же описана специфика рассмотрения этой задачи, трактуемой в содержательном плане как задача о «*конкурентном равновесии*» (*competitive equilibrium*).

Используя подход работ [4], [11] и [5], основанный на методе множителей Лагранжа, записанном в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, можно показать, что необходимые условия экстремума в данной задаче могут быть представлены в виде следующей системы разностных уравнений:

$$k_{t+1} = Ak_t^{\beta}u_t^{1-\beta}h_t^{1-\beta+\gamma} - c_t + (1-\delta_k)k_t, \tag{2.4}$$

$$h_{t+1} = \delta(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t, \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^{\sigma} = \rho\left(\beta Ak_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta}h_t^{1-\beta+\gamma} + (1-\delta_k)\right) \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{u_t}{u_{t-1}}\right)^{\beta} = \rho\left(\frac{c_{t-1}}{c_t}\right)^{\sigma}\left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^{\beta}\left(\frac{h_t}{h_{t-1}}\right)^{\gamma-\beta}((1-\delta_h)+\delta). \tag{2.7}$$

Заметим, что в уравнениях (2.4)–(2.7) фактически предполагается, что, в соответствии с экономическим смыслом переменных, справедливо включение $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$, $\mathbb{R}_{++} \equiv (0,\infty)$.

В математической теории экономического роста обычно ограничиваются исследованием только некоторого подмножества $\mathcal{P}_{BGP}$ множества $\mathcal{P}$ оптимальных траекторий, а именно – рассмотрением *сбалансированных оптимальных траекторий.* По-видимому, впервые такие траектории были рассмотрены в работе [9]. Сам термин «*сбалансированная оптимальная траектория*» (*Balanced Growth Path, BGP – траектория*) носит достаточно условный характер. Фактически речь идет о траекториях, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности и таким, что темпы роста всех или нескольких переменных вдоль таких траекторий постоянны. Как отметил Р. Лукас, вообще говоря, не очень ясно, что «сбалансировано» вдоль таких траекторий, «но поскольку мы нуждаемся в некотором термине для обозначения решений со свойством постоянного темпа роста, то этот термин столь же хорош как любой другой»(см. [9], P. 26).

Напомним, что для функции $z(t)$ дискретного аргумента t темпом роста называется величина $\omega_z(t) = \frac{z(t+1)}{z(t)}$. Таким образом, сбалансированной траекторией системы (2.4) – (2.7) является траектория, для которой темпы роста ω_k, ω_h, ω_c и ω_u постоянны.

3. Существование сбалансированных траекторий

Сформулируем сначала некоторое «условное» утверждение о существовании сбалансированных траекторий.

Теорема 3.1. *Если система уравнений* (2.4)–(2.7) *имеет BGP – траектории, то на BGP – траекториях справедливы следующие утверждения:*

1*. *Для переменных* $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$ *имеют место «законы сохранения»:*

$$u_t = const,\ k_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} = const,\ \frac{c_t}{k_t} = const. \tag{3.1}$$

2*. *Для темпов роста переменных* $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$ *имеют место равенства:*

$$\omega_u = 1,\ \omega_k = \omega_c,\ \omega_k^{1-\beta} = \omega_h^{1-\beta+\gamma}, \tag{3.2}$$

$$\omega_h^{\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\beta}-\sigma} = \frac{1}{\rho[(1-\delta_h)+\delta]}. \tag{3.3}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\omega_h = const$. Тогда из уравнения (2.5) следует равенство $\frac{h_{t+1}}{h_t} = \delta(1-u_t) + (1-\delta_h) = const$, из которого вытекает, что $u_t = const$ и, значит, $\omega_u = 1$. Далее, если $\omega_c = const$, то в силу равенства $u_t = const$ и уравнения (2.6) имеет место соотношение

$$k_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} = M = const > 0. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)^{\beta-1} \left(\frac{h_{t+1}}{h_t}\right)^{1-\beta+\gamma} = \frac{M}{M} = 1$, так что $\omega_k^{1-\beta} = \omega_h^{1-\beta+\gamma}$. Из уравнения (2.4) имеем:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = A k_t^{\beta} u_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} - \frac{c_t}{k_t} + (1-\delta_k) = const. \tag{3.5}$$

В силу условий $u_t = const$, $\omega_k = const$ и равенства (3.4) из уравнения (3.5) следует соотношение $\frac{c_t}{k_t} = const$, из которого, в свою очередь, следует равенство $\omega_k = \omega_c$. Таким образом, соотношения (3.1) и (3.2) обоснованы. Равенство (3.3) следует из уравнения (2.7) и соотношений (3.1) и (3.2).
Доказательство закончено.

«Интегралы движения» (3.1) позволяют провести замену переменных в системе уравнений (2.4)–(2.7). Введем новые переменные $q_t = \frac{c_t}{k_t}$ и $x_t = \frac{k_t}{(h_t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}$. Переход от переменых (k, h, c, u) к переменным (x, q, c, u) позволяет привести систему уравнений (2.4)–(2.7) к виду:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)}{[\delta(1-u_t) + (1-\delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}, \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{q_{t+1}}{q_t}\right)^{\sigma} = \frac{\rho\left[\beta A x_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1-\delta_k)\right]}{\left[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)\right]^{\sigma}}, \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{\beta} = \frac{\left[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)\right]^{\beta}[\delta(1-u_t) + (1-\delta_h)]^{\gamma-\beta}}{[\beta A x_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1-\delta_k)]}[(1-\delta_h)+\delta]. \tag{3.8}$$

$$(\frac{c_t}{c_{t-1}})^{\sigma} = \rho\left[\beta A x_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} + (1-\delta_k)\right], \tag{3.9}$$

Система уравнений (3.6) – (3.9) обладает специфической структурой – уравнения (3.6) – (3.8) образуют замкнутую подсистему. Их решение позволяет однозначно определить решение уравнения (3.9). Таким образом, произведенная замена переменных позволила «понизить порядок» исследуемой системы уравнений.

Заметим, что в силу (3.1) и (3.2) справедливы равенства

$$\omega_q = 1, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_u = 1, \tag{3.10}$$

означающие, что первые три координаты сбалансированных траекторий образуют стационарные (неподвижные) точки системы (3.6) – (3.8).

Таким образом, исследование динамики исходной математической модели и вопросов существования BGP – траекторий тесно связано с изучением системы трех разностных уравнений (3.6) – (3.8). При этом важную роль играет определение количества и свойств стационарных (неподвижных) точек системы (3.6) – (3.8).

Обозначим стационарные значения переменных, фигурирующих в системе (3.6) – (3.8), (x, q, u). Используя для преобразования системы (3.6) – (3.8) условие (3.10), получим соответствующую «стационарную» систему уравнений для определения переменных (x, q, u) (координат неподвижных точек системы (3.6) – (3.8)). Введем в рассмотрение величину $U = Ax^{\beta-1}u^{1-\beta}$. Проводя несложные алгебраические выкладки нетрудно показать, что стационарная система уравнений может быть записана в виде:

$$[\delta(1-u) + (1-\delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}} = U - q + (1-\delta_k), \tag{3.11}$$

$$[U - q + (1-\delta_k)]^{\sigma} = \rho\left[\beta U + (1-\delta_k)\right], \tag{3.12}$$

$$\beta U + (1-\delta_k) = [U - q + (1-\delta_k)]^{\beta}\left[\delta(1-u) + (1-\delta_h)\right]^{\gamma-\beta}\left[(1-\delta_h)+\delta\right]. \tag{3.13}$$

Возведя обе части уравнения (3.11) в степень σ, сложим его почленно с уравнением (3.12). Получим:

$$[\delta(1-u) + (1-\delta_h)]^{\frac{\sigma(1-\beta+\gamma)}{1-\beta}} = \rho\left[\beta U + (1-\delta_k)\right]. \tag{3.14}$$

Возведем теперь обе части уравнения (3.11) в степень β и разделим на него почленно уравнение (3.13). При этом получим:

$$\frac{\beta U + (1-\delta_k)}{[\delta(1-u) + (1-\delta_h)]^{\frac{\beta(1-\beta+\gamma)}{1-\beta}}} = [(1-\delta_h)+\delta]\,[\delta(1-u) + (1-\delta_h)]^{\gamma-\beta} \tag{3.15}$$

Перемножим почленно уравнения (3.14) и (3.15) и получим уравнение относительно единственной переменной u:

$$[\delta(1-u)+(1-\delta_h)]^D = \rho\,[(1-\delta_h)+\delta]\,, \quad D = \frac{\sigma(1-\beta)+\gamma(\sigma-1)}{1-\beta}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) вытекает, что «стационарное» значение переменной $u \equiv u_{BGP}$ задается следующей формулой:

$$u_{BGP} = \frac{\Delta - [\rho\Delta]^{\frac{1}{D}}}{\delta}, \quad \Delta \equiv (1-\delta_h)+\delta. \tag{3.17}$$

Ясно, что проведенные выше выкладки имеют место лишь при условии $J \equiv [U - q + (1-\delta_k)] \neq 0$. Однако легко показать, опираясь на справедливое на BGP – траектории соотношение (3.11), что для всех допустимых значений переменных $x, q \in \mathbb{R}_{++}$, $u \in [0,1]$ имеет место неравенство $J > 0$.

Используя теперь представление (3.17) и уравнения (3.12) и (3.13), нетрудно получить явные формулы и для стационарных значений переменных $x \equiv x_{BGP}$ и $q \equiv q_{BGP}$. Эти формулы достаточно элементарны, но весьма громоздки и поэтому не приводятся. Однако из них, а также из соотношения (3.17) можно получить ряд весьма полезных выводов о тех ограничениях на параметры системы, при которых существуют реализуемые (имеющие экономический смысл) BGP – траектории.

Например, поскольку u_t и u_{BGP} характеризуют долю времени, затрачиваемую ЭА на производственную деятельность, то, в силу экономического смысла этих величин, должно быть справедливо включение $u_t,\ u_{BGP} \in (0,1)$.

Следующее утверждение отвечает на вопрос, при каких условиях на параметры системы это возможно.

Теорема 3.2. *Пусть имеет место одна из следующих систем неравенств:*

$$1^*. \ \ D > 0, \ \ \frac{(1-\delta_h)^D}{(1-\delta_h)+\delta} < \rho < ((1-\delta_h)+\delta)^{D-1}. \tag{3.18}$$

$$2^*. \ \ D > 0, \ \ ((1-\delta_h)+\delta)^{D-1} < \rho < (1-\delta_h)^D((1-\delta_h)+\delta)^{-1}. \tag{3.19}$$

Тогда справедливо включение $u_{BGP} \in (0,1)$.

Поясним соотношения (3.18) и (3.19). Рассмотрим неравенства 1^*. Неравенство $u = u_{BGP} > 0$ в силу представления (3.17) и условия $D > 0$ влечет за собой неравенство $\Delta^{D-1} > \rho$; аналогично, неравенство $u = u_{BGP} < 1$ в сочетании с представлением (3.17) и условием $D > 0$ влечет за собой неравенство $(\Delta-\delta)^D < \rho\Delta$. Сходные рассуждения позволяют обосновать и неравенства 2^*.

Для переменных x_{BGP} и q_{BGP} имеют место похожие утверждения.

Обозначим вектор параметров системы (2.1) – (2.3) $\theta \equiv col\{A, \delta, \gamma, \beta, \rho, \delta_k, \delta_h, \sigma\} \in \Theta$, $\Theta \equiv \mathbb{R}^3_{++} \times [0,1]^4 \times \Sigma$, $\Sigma = (0,1) \cup (1,\infty)$. Из теоремы 3.2. и аналогичных ей утверждений для переменных x_{BGP} и q_{BGP} следует, что в пространстве параметров Θ системы (3.6) – (3.8) можно выделить непустую область Θ_{BGP}, для которой существуют BGP – траектории. Более того, из проведенных выше рассуждений следует также, что имеет место

Теорема 3.3. *Система* (2.4)-(2.7) *имеет единственную реализуемую траекторию сбалансированного роста.*

4. Заключение

Понятно, что значительный интерес представляет вопрос о типе неподвижной точки системы (3.6) – (3.8) и, соответственно, поведении системы (2.4) – (2.7) в окрестности найденной BGP – траектории. Большой интерес представляет также поведение системы в окрестности начала координат и границ множества $\mathbb{R}^3_+$. Этим вопросам будет посвящена отдельная работа.

Список литературы

1. Arrow K.J., “The Economic Implications of Learning by Doing”, *Review of Economic Studies*, **29**:1 (1962), 155 – 173.
2. Barro R., Sala - i – Martin X., *Economic Growth. 2-nd Edition*, Cambridge, Massachusetts – London, England: MIT Press., 2004, 654 pp.
3. Bethmann D., “A Closed-form Solution of the Uzawa – Lucas Model of Endogenous Growth”, *Journal of Economics*, **90**:1 (2007), 87–107.
4. Chow G.C., *Dynamic Economics: Optimization by Lagrange Method*, Oxford: Oxford University Press., 1997, 234 pp.
5. de la Croix D., Michel P., *A Theory of Economic Growth. Dynamic and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge: Cambridge University Press., 2004, 378 pp.
6. Gomes O., “Decentralized allocation of human capital and nonlinear growth”, *Computering Economics*, **31** (2008), 45–75.
7. Gourdel P., Ngoc L.H., Le Van C., Mazamba T., “Equilibrium and Competitive Equilibrium in a Discrete-Time Lucas Model”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **10**:5 (2004), 501–514.
8. Hiraguchi R., “A two sector endogenous growth model with habit formation”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **35**:3 (2011), 430–441.
9. Lucas R.E., “On the mechanics of economic development”, *Journal of Monetary Economics*, **22**:1 (1988), 3–42.
10. Robinson C., *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.*, CRC Press LLC., 1999, 506 pp.
11. Stokey N.L., Lucas R.E., Jr., Prescott E.C., *Recursive Methods in Economic Dynamics. Seventh printing.*, Cambridge, Massachusetts – London, England: Harvard University Press., 2004, 588 pp.
12. Uzawa H., “Optimal technical change in an aggregate model of economic growth”, *International Economic Review*, **6** (1965), 213–217.
13. Круглов Е.В., “О некоторых моделях циклов деловой активности”, *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 8(215), 44 – 50.

14. Кузнецов Ю.А., *Оптимальное управление экономическими системами*, Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета., 2008, 449 с.

15. Кузнецов Ю.А., "Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. I", *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 17(224), 50 – 61.

16. Кузнецов Ю.А., "Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. II", *Экономический анализ: теория и практика*, 2011, № 18(225), 42 – 57.

17. Кузнецов Ю.А., "Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. I", *Экономический анализ: теория и практика*, 2012, № 43 (298), 2 – 17.

18. Кузнецов Ю.А., "Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. II", *Экономический анализ: теория и практика*, 2012, № 44(299), 2 – 14.

19. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В., "Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала", *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012, № 4, 46 – 57.

20. Шараев Ю.В., *Теория экономического роста*, М.: Издательство ГУ ВШЭ., 2006, 254 с.

Mathematical model of economic growth based on the accumulation of human capital with discrete time

© **Yu. A. Kuznetsov[4], E. V. Kruglov[5], D. A. Burlakova [6]**

Abstract. The mathematical model of economic growth taking in account the process of the human capital accumulation and with discrete time is considered. This mathematical model is reduced to the study of three-dimensional dynamical system with discrete time. The conditions of existence of a unique balanced growth path are determined.

Key Words: model of economic growth based on human capital, three-dimensional dynamical systems with discrete-time, balanced growth path

[4] Head of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; Yu-Kuzn@mm.unn.ru.

[5] Associated Professor of Mathematical Modelling of Economic Processes department, Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; kruglov19@mail.ru.

[6] Postgraduate student, Lobachevcky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; groha@yandex.ru.