УДК 517.9

Оптимальное управление в математической модели государства

© В. К. Захаров[1], О. А. Кузенков[2]

Аннотация. В статье на основе общей агрегированной модели государства в широком смысле (близком к слову «страна»), понятия реальной стоимости достояний и теории денег как средства государственного управления создаётся математическая модель государства с базисным использованием ссудного дохода в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений при различных функционалах качества. В качестве конкретного случая рассматривается задача обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства. Приводится явное аналитическое решение полученной оптимизационной задачи.
Ключевые слова: Государство в широком смысле, общая модель государства, реальная стоимость достояний, деньги как средство государственного управления, математическая модель государства, система экономических уравнений государства с базисным использованием ссудного дохода, оптимизационная задача, оптимальное управление, аналитическое решение.

Введение

Статья состоит из трёх частей. В первой и второй частях, принадлежащих первому автору, излагается *общая агрегированная модель государства в широком смысле* (близком к слову «*страна*»), восходящая к [3], и на её основе создаётся математическая *модель государства с базисным использованием ссудного дохода* в виде системы из семи дифференциальных уравнений с восемью управляющими параметрами. Для неё ставится оптимизационная задача нахождения оптимальных управлений для *обеспечения максимума совокупного конечного достояния государства.* В третьей части, принадлежащей второму автору, приводится явное аналитическое решение указанной выше оптимизационной задачи, которое позволяет дать эффективный численный алгоритм поиска оптимального управления. Решение даётся на основе использования классических методов оптимального управления и приемов решения оптимизационных задач, разработанных для систем авторепродукции [5]. В заключение находится численное решение задачи при одном наборе значений параметров и начальных данных.

Статья является развитием статьи [3], в которой решалась оптимизационная задача для более простой *базисно-надстроечной модели государства с базисным использованием ссудного дохода* в виде системы из двух дифференциальных уравнений с тремя управляющими параметрами.

1. Общая агрегированная модель государства

Каждое государство в широком смысле, близком к слову «страна», является сложной трёхуровневой жизнедеятельной системой общества, устроенной в виде совокупности

[1] Профессор кафедры теоретической информатики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Нижний Новгород; zakharov_valeriy@list.ru

[2] Доцент кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kuzenkov_o@mail.ru

основных систем: содержательной C, учётной D, обеспечительной E, совокупной распорядительной F и властной P [2]. Содержательная, учётная и обеспечительная системы связаны с *природной средой* A_1, *внешней организованной средой* A_2, состоящей из зарубежных жизнедеятельных единиц и государств, и *внутренней организованной средой* A_3, состоящей из теневых единиц. Властная система выделяет в учётной системе **казначейскую систему**, осуществляющую выдачу бюджетных денег. Для использования денег самой содержательной системой властная система также выделяет в учётной системе **банковскую систему**, осуществляющую выдачу ссудных денег с условием возврата с относительной прибавочной долей r.

Используемые государством и производимые им достояния располагаются в единицах государства и во внешних средах. Все эти достояния подразделяются на следующие **виды**: *содержательное* (код 1), *распорядительное* (код 2), *властное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *учётное* (код 5). Каждая основная система производит *достояние своего вида.* При производстве соответствующего достояния каждая система использует некоторые из имеющихся в ней достояний. Все основные системы связаны между собой потоками производимых достояний. Содержательная, учётная и обеспечительная системы получают из внешних сред и отдают в эти среды соответствующие достояния. В сильно агрегированной форме устройство и функционирование государства, а также описание имеющихся в нём достояний и потоков дано на рисунке 1.1. На нем производимые достояния выделены квадратиком с жирным контуром. Дугами указаны *преобразовательные потоки. Передаточные потоки* показаны стрелками с указанием кодов на концах стрелок. *Произведённые потоки* обозначены прямыми входящими стрелочками, а *изведённые* – выходящими.

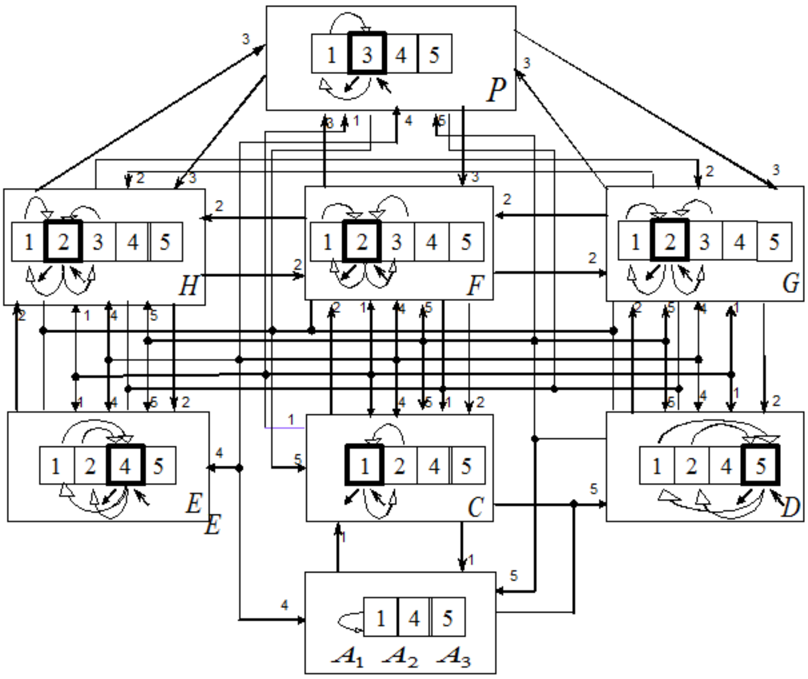

Рисунок **1.1**

Схема систем, достояний и потоков государства

2. Математическая модель государства и оптимальное управление в ней

Математическая модель государства создаётся на основе общей агрегированной модели посредством использования *реальной денежной стоимости достояний всех видов* [2]. Достояние вида m в системе M в момент времени t будем обозначать через $W_M^m(t)$. *Система эволюционных уравнений государства* составляется по следующему *принципу сохранения*: скорость изменения реальной стоимости достояния какого-либо вида в какой-либо основной системе равно сумме реальных стоимостей всех входящих потоков этого достояния в эту систему минус сумма реальных стоимостей всех выходящих потоков этого достояния из этой системы. Система эволюционных уравнений упрощается путём наложения *допущений для потоков достояний*. Часть допущений основана на *предположении о сохранении реальной стоимости достояний*, другая часть допущений основана на новой теории денег как средства государственного управления [1]. Все преобразования и упрощения были проделаны в [3]. В частности, там было положено, что ссудный поток L_{DC}^{55} имеет вид

$$L_{DC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr + (B_{DC}^{55} + B_{DD}^{55} + B_{DE}^{55} + B_{DF}^{55} + B_{DG}^{55} + B_{DH}^{55} + B_{DP}^{55})),$$

где B_{DM}^{55} обозначает бюджетный поток из системы D в систему M (M принимает значения из множества $\{C, D, E, F, G, H, P\}$), число $K > 0$ обозначает *наибольшую предельно возможную величину содержательного достояния содержательной системы*, положительные числа a, c, d представляют собой размерностные коэффициенты. В [3] была получена *система экономических уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода*

$$\dot{W}_C^1 = L_{DC}^{55} - (p_1 B_{DD}^{55} + p_2 B_{DE}^{55} + p_3 B_{DF}^{55} + p_4 B_{DG}^{55} + p_5 B_{DH}^{55} + p_6 B_{DP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

$$\dot{W}_D^5 = B_{DD}^{55} - e_1 W_D^5,\ \dot{W}_E^4 = B_{DE}^{55} - e_2 W_E^4,\ \dot{W}_F^2 = B_{DF}^{55} - e_3 W_F^2,$$

$$\dot{W}_G^2 = B_{DG}^{55} - e_4 W_G^2,\ \dot{W}_H^2 = B_{DH}^{55} - e_5 W_H^2,\ \dot{W}_P^3 = B_{DP}^{55} - e_6 W_P^3,$$

где $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$. В этой системе параметры B_{DM}^{55}, r являются управлениями. На управления накладываются ограничения $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, $(B_{DM}^{55})_0 \leqslant B_{DM}^{55} \leqslant (B_{DM}^{55})_1$ для $M \in \{C, D, E, F, G, H, P\}$.

Властная система государства должна решать оптимизационную задачу на выбор оптимальных управлений в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[0, T]$. Например, возможной целью может быть *обеспечение максимума совокупного конечного достояния государства*, т. е.

$$(W_C^1 + W_D^5 + W_E^4 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(T) \to \max.$$

Далее в статье рассматривается нахождение оптимального решения указанной системы при следующих числовых данных: $T = 100$, $K = 300$, $d = 20$, $a = 0.0005$, $c = 1$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = p_4 = p_5 = 0.2$, $p_6 = 0.7$, $e_0 = 0.015$, $e_1 = 0.005$, $e_2 = 0.02$, $e_3 = e_4 = e_5 = 0.005$, $e_6 = 0.01$, $W_C^1(0) = 100$, $W_D^5(0) = 20$, $W_E^4(0) = 20$, $W_F^2(0) = 10$, $W_G^2(0) = 10$, $W_H^2(0) = 10$, $W_P^3(0) = 30$, $r_0 = 0.001$, $r_1 = 1$, $(B_{DC}^{55})_0 = 0$, $(B_{DC}^{55})_1 = 0.5$, $(B_{DM}^{55})_0 = 0.1$, $(B_{DM}^{55})_1 = 0.2$ для $M \in \{D, E, F, G, H, P\}$.

3. Решение оптимизационной задачи для модели государства

Далее для удобства полагается $W_C^1 = x$, $W_M = y_i$ для $M \in \{C, D, E, F, G, H, P\}$, соответственно, $r = u$, $B_{DC}^{55} = v$, $B_{DM}^{55} = w_i$.

В новых обозначениях управляемая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(K-x)x}{c + qu + v + \sum\limits_{j=1}^{6} w_j} - \sum_{j=1}^{6} p_j w_j - e_0 x,\ \frac{dy_i}{dt} = w_i - e_i y_i, i = \overline{1,6}, \tag{3.1}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y_i(0) = y_{i0}$, $i = \overline{1,6}$. Здесь $K, a, d, p_i, c, e_i, e_o$ – некоторые положительные константы, u, v, w_i – управляющие функции времени ($i = \overline{1,6}$), удовлетворяющие в каждый момент времени $0 \leqslant t \leqslant T$ ограничениям $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$, $w_{i0} \leq w \leq w_{i1}$, $i = \overline{1,6}$. Кроме того, считается, что $0 < x_0 < K$.

Задача состоит в том, чтобы найти управляющие функции u, v и w_i, $i = \overline{1,6}$, при которых выражение $x(T) + \sum_{i=1}^{6} y_i(T)$ достигает наибольшего значения, где T – заданное время управления. Для решения поставленной оптимизационной задачи будем использовать принцип максимума Л.С. Понтрягина. В этом случае сопряженная система имеет вид

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \left(-\frac{a(K-2x^*)}{c + qu^* + v^* + \sum\limits_{j=1}^{6} w_j^*} + e_0 \right) \psi_1,\ \frac{d\psi_i}{dt} = e_i \psi_i,\ i = \overline{2,6}.$$

Условия трансверсальности выглядят следующим образом $\psi_1(T) = -1$, $\psi_i(T) = -1$, $i = \overline{2,6}$. Здесь u^*, v^*, $w_i{}^*$ – оптимальные управления, $i = \overline{1,6}$, x^* – соответствующее им решение первого уравнения системы (3.1). Очевидно, что при этом все компоненты решения сопряженной системы отрицательны.

Функция Гамильтона $H(u, v, w)$ принимает вид

$$H = \psi_1\left(\frac{a(K-x^*)x^*}{c + qu + v + \sum\limits_{i=1}^{6} w_i} - \sum_{i=1}^{6} p_i w_i - e_0 x^*\right) + \sum_{i=2}^{6} \psi_{i+1}(w_i - e_i y_i^*).$$

Здесь x^*, $y_i{}^*$ – решения системы (3.1), соответствующие оптимальному управлению, $i = \overline{1,6}$. В соответствии с принципом Л. С. Понтрягина минимум функции Гамильтона реализуется на оптимальном управлении. Дальнейшие усилия были сосредоточены на исследовании функции Гамильтона и поиске ее минимума.

При условии, что оптимальное решение удовлетворяет неравенству $0 < x^*(t) < K$, очевидно, что минимум функции Гамильтона будет достигаться при минимальном возможном значении управляющих параметров u и v. Таким образом, оптимальные управления u^* и v^* постоянны: $u^* = u_0$, $v^* = v_0$. Далее на основе анализа решения сопряженной системы и поведения функции Гамильтона было доказано, что все оптимальные управления w_i имеют релейный характер, они кусочно-постоянны и принимают значения либо w_{i0}, либо w_{i1}, $i = \overline{1,6}$. Таким образом, задача построения оптимального управления сводится к задаче нахождения его точек переключения с одного постоянного режима на другой. Для определения значений моментов переключения использовался численный метод перебора. Численное решение поставленной задачи оптимального управления проводилось при приведенных выше числовых значениях параметров и начальных данных. Проведенные расчеты показывают, что оптимальным будет постоянное управление (без переключений): $u^* = u_1$, $v^* = v_1$, $w^* = w_{i1}$, $i = \overline{1,6}$.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12452 офи_м2.

Список литературы

1. В.К. Захаров, "Финансово-кризисные способы государственного и межгосударственного управления", *Национальные интересы: приоритеты и безопасность*, 2010, №11, 9-16.
2. В.К. Захаров, *Номология. Устроение и направление человеческой деятельности: учебное пособие*, М.: МГППУ, 2011, 216 с.
3. В.К. Захаров, О.А. Кузенков, "Оптимальное управление в модели государства", *Моделирование и анализ данных*, 2011, №1, 55-75.
4. В.К. Захаров, Е.С. Половинкин, А.Д. Яшин, "Математическая модель государства", *Доклады РАН*, **413**:2 (2007), 158-162.
5. О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, "Оптимальное управление системами авторепродукции", *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2012, №4, 26-37.

Optimal control in mathematical state model

© V.K. Zakharov[3], O. A. Kuzenkov[4]

Abstract. Some mathematical model of a state is constructed in the form of a system of seven differential equations with eight controlling parameters. It is based on some general aggregated model of a state in broad meaning (close to the word «country»), on some notion of a real cost of wealth, and on some theory of money as a weapon of state administration. The optimization problem of finding the optimal controls under varies quality functionals is considered for this system. In the capacity of a concrete case the problem of guaranteeing the maximum of the joint final wealth of a state is considered. The explicit analytical solution of the obtained optimization problem is presented

Key Words: The state in broad meaning, the general model of the state, a real cost of wealth, money as a weapon of state administration, the mathematical model of the state, the economic system of the state with the basic use of the loan income, optimization problem, optimal control, analytical solution

[3] Professor of Theoretical Computer Science chair, Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; zakharov_valeriy@list.ru

[4] Associate Professor of numerical and functional analysis chair, Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; kuzenkov_o@mail.ru