Краткие сообщения

УДК 517.929

Вещественный радиус устойчивости матрицы системы

© А. В. Зубов [1], С. В. Зубов [2]

Аннотация. В работе рассмотрен достаточно широкий класс матриц устойчивых по Важевскому, т. е. устойчивых матриц P для которых симметрическая матрица $P+P^T$ также устойчива. Для этого семейства матриц показано, что их вещественным радиусом устойчивости, является наименьшее собственное число матрицы - $(P+P^T)\backslash 2$. Этот результат позволяет определить вещественный радиус устойчивости «сверхустойчивых» матриц, т. к. они являются матрицами устойчивыми по Важевскому.

Ключевые слова: матрица, устойчивость, вещественный радиус, спектральная норма, нестационарная система

Определение 1.1. *Будем называть матрицу P устойчивой по Важевскому, если матрица $H=\frac{P+P^T}{2}$ является устойчивой.*

Введение подобного определения связано с тем, что Важевский, используя свойства дифференциальных уравнений, показал, что нестационарная система первого приближения $\dot{X}=P(t)X$ будет устойчива, если все собственные числа $\lambda_i(t)$ симметрической матрицы $H(t)=\frac{P(t)+P(t)^T}{2}$ удовлетворяют условию $\forall t \ \ \lambda_i(t)\le\lambda<0$.

Очевидно, что если матрица P устойчива по Важевскому, то она устойчива [1]. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Определение 1.2. *Будем называть вещественным радиусом устойчивости по Важевскому матрицы P наибольшее из чисел γ, при котором, матрица $P+\Delta$ - устойчива по Важевскому, где матрица Δ, удовлетворяет условию $\|\Delta\|<\gamma$. Здесь $\|\Delta\|$ - спектральная норма.*

Задача определения вещественного радиуса устойчивости является весьма сложной и совсем недавно решена только для стационарных матриц, причем полученные оценки являются весьма трудно проверяемыми [3]. Вопрос заключается в исследовании устойчивости матрицы $P+\Delta$, где матрица P - устойчива, а вещественная матрица Δ, удовлетворяет условию $\|\Delta\|<\gamma$. Наибольшее из чисел γ, при котором матрица $P+\Delta$ - устойчива и называется вещественным радиусом устойчивости.

Справедливы теоремы.

Теорема 1.1. *Если матрица P - устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому можно определить по формуле $\gamma=\min\limits_{i=\overline{1,n}}\lambda_i$, где λ_i, $i=\overline{1,n}$ - собственные числа симметрической матрицы $H=\frac{P+P^T}{2}$.*

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица P - устойчива по Важевскому. Для того чтобы матрица $P+\Delta$ была также устойчива по Важевскому необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства

$$\forall X \neq 0 \qquad X^T(\frac{P^T+P}{2} + \frac{\Delta^T+\Delta}{2})X < 0. \tag{1.1}$$

Заметим, что имеют место два очевидных неравенства

$$X^T(\frac{\Delta^T+\Delta}{2})X \leq \|\Delta\| \cdot \|X\|^2, \qquad \|X\|^2 \min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i \leq X^T H X \leq \max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i \|X\|^2,$$

где $H = \frac{P+P^T}{2}$, а λ_i, $(\overline{1,n})$ ее собственные числа. Из этих неравенств вытекает, что при выполнении неравенства $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i + \|\Delta\| < 0$ выполняется и неравенство (1.1). Так как справедливо равенство - $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, то одна из нижних оценок величины γ получена.

Для того чтобы убедиться в том, что найденное число γ, является наибольшим достаточно подобрать матрицу Δ так, что $\|\Delta\| = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, но при этом матрица $P+\Delta$ была неустойчива по Важевскому. Известно, что матрицу H можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования Q так, что $H = Q_1 \Lambda Q_1^T$. Для простоты будем считать, что диагональные элементы матрицы Λ расположены в порядке убывания. Возьмем матрицу $\Delta = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$, где Λ_1 - диагональная матрица с диагональными элементами равными $\min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$. Тогда с одной стороны $\|\Delta\| = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, т. к. $\Delta = \Lambda_1$, а с другой если в качестве вектора X выбрать первый столбец матрицы Q_1, то получим равенство

$$X^T(\frac{P+P^T}{2} + \frac{\Delta^T+\Delta}{2})X = 0.$$

Это показывает, что величина $\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ является вещественным радиусом устойчивости по Важевскому для матрицы P.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. *Нетрудно видеть, что вещественный радиус устойчивости $\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ совпадает с минимальным собственным числом матрицы $-(P+P^T)\backslash 2$.*

Т е о р е м а 1.2. *Пусть матрицы $P_1, P_2, \dots, P_m$ устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая линейная комбинация*

$$P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

также устойчива по Важевскому.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрицы $P_1, P_2, \dots, P_m$ устойчивы по Важевскому, тогда $\forall X \ \ X^T P_i X < 0$, $i = \overline{1,m}$. Суммируя, получим

$$P = X^T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i)X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X^T P_i X < 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Это означает, что матрица P устойчива по Важевскому. Кроме того, условие нормировки $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, является излишним. Можно заменить в этом равенстве единицу на любое положительное число.
Доказательство закончено.

Замечание 1.2. *Полученный результат справедлив и для нестационарных матриц* $P_j(t)$, $j = \overline{1,m}$ *для которых, собственные числа* $\lambda_{ji}(t)$ *симметрических матриц* $H_j(t) = \frac{P_j(t)+P_j(t)^T}{2}$ *удовлетворяют условиям* $\forall t \ \ \lambda_{ji}(t) \leq \lambda_j < 0$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

Список литературы

1. Fan Ky, "On a Theorem of Weyl Concerning the Eigenvalues of Linear Transformation", . Nat. Acad. Sci. U.S.A., **35**:1 (1949), 652 -655.
2. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, *Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости*, Изд. ВЦ РАН, М., 2007, 234 с.
3. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002.
4. В.И. Зубов, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 223 с.
5. Л.Д. Блистанова и др., *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
6. Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Ил, М., 1954.
7. Н.М. Гюнтер, *Курс вариационного исчисления*, Гостехиздат, М., 1941.
8. В.Ф. Демьянов, *Условия экстремума и вариационные задачи*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, С.-Петербург, 2000.
9. В.И. Зубов, *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*, Судпромгиз, Л, 1959.
10. Н.Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968.
11. Ж. Лагранж, *Аналитическая динамика*, Гостехиздат, М., 1950.
12. А.И. Лурье, *Аналитическая механика*, Физматгиз, М., 1961.
13. И.Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, М., 1949.

The material radius of stability of matrix system

© **A. V. Zubov** [3], **S. V. Zubov** [4]

Abstract. In this work is looking off sufficiently classes of matrixes stability on Vagevsky, i. e. stability matrixes P for that symmetrical matrix $P + P^T$ also stability. For this family of matrixes is describes, that they material radius of stability is appears smaller own number of matrix - $(P + P^T)\backslash 2$. This result is allows to define material radius of stability «over stability» matrixes, i. e. they ia appears the matrixes stability on Vashevskiy.

Key Words: matrix, stability, material radius, spectral norma, in stationary system

[3] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[4] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru