УДК 517.9

Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие

© А. Ю. Павлов[1]

Аннотация. На основе обобщения неравенства Важевского найдены классы дифференциальных систем уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения не является необходимым условием управляемости за бесконечное время. Рассматривается пример скалярного уравнения, первое приближение для которого не имеет асимптотического равновесия, хотя само оно является управляемым за бесконечное время.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, управляемость за конечное и бесконечное время, асимптотическое равновесие

Важную роль в математической теории управления играют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за конечное и бесконечное время [3],[4].

При управляемости за конечное время произвольная фиксированная точка переводится в другую произвольную точку за определенное время T. В случае управляемости за бесконечное время фиксированная точка переводится в сколь угодно малую окрестность другой точки, причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит.

В работах [1], [2] профессором Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости нелинейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u) + F(t) \tag{1.1}$$

за конечное и бесконечное время в определенных классах допустимых управлений $\mathbf{K}$.

Данные условия получены на основе асимптотической теории интегрирования уравнений движения и метода сравнения. Причем уравнением сравнения является

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u + F(t). \tag{1.2}$$

Одним из условий управляемости за бесконечное время является существование асимптотического равновесия [6] у системы первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \tag{1.3}$$

Для системы (1.3) существование асимптотического равновесия следующее [5].

Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица уравнения (1.3), нормированная в нуле, $Y(0) = E$, $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = Y(+\infty)$, $det\, Y(+\infty) \neq 0$.

Тогда говорят, что система (1.3) имеет асимптотическое равновесие.

Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

П р и м е р 1.1. . *Рассмотрим скалярное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = -x + u \tag{1.4}$$

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск, korspa@yandex.ru

Уравнение первого приближения
$$\frac{dy}{dt} = -y \tag{1.5}$$
не имеет асимптотического равновесия, так как общее решение уравнения (1.5): $y(t) = c\, e^{-t}$ *и, следовательно,* $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0\,,\ \forall c \in R\,.$

Покажем, что уравнение (1.4) является управляемым за бесконечное время. Пусть точку x_0 *по траектории уравнения (1.4) необходимо перевести за бесконечное время в точку* x_1 *, то есть* $x(t_0) = x_0\,,\ x(+\infty) = x_1\,.$

Частное решение уравнения (1.4), проходящее через точку (t_0, x_0) *имеет вид*

$$x(t) = e^{-t}\Big(\int\limits_{t_0}^{t} e^{s}u(s)ds + x_0 e^{t_0}\Big)$$

Найдем такое управление u *, что* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_1$ *. Имеем* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} e^{s}u(s)ds + x_0e^{t_0}}{e^t}$ *.*

Если потребовать непрерывность функции на промежутке $[t_0, +\infty)$ *, то к последнему пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t u(t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} u(t).$$

То есть искомым управлением может быть любая непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = x_1$ *. В частности, можно положить* $u(t) = x_1\,;\ u(t) = x_1 + \frac{1}{t}\,;\ u(t) = x_1 - \frac{1}{t^2}\,.$

Таким образом, система (1.4) является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия.

Определенный интерес представляют классы уравнений, для которых существование асимптотического равновесия у уравнения первого приближения является необходимым или достаточным условием. Найдем класс дифференциальных систем, управляемых за бесконечное время в некотором классе допустимых управлений без предположения существования асимптотического равновесия первого приближения.

Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,u), \\ x(t_0) = x_0, x(+\infty) = x_1 \end{cases} \tag{1.6}$$
где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m\,,\ T \le t < +\infty\,,\ A(\cdot) : [T, +\infty) \mapsto Hom(R^n, R^n)$ - непрерывное отображение, $f \in C([T, +\infty) \times R^n \times R^m, R^n)\,.$

Необходимо перевести точку x_0 в точку x_1 по траектории уравнения (1.6) за бесконечное время.

Пусть $y = x - x_1\,.$ Тогда $\dot y = \dot x$ (точкой обозначена производная по t), $x = y + x_1\,.$ Система (1.6) перепишется в виде

$$\begin{cases} y = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, y(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Обозначим $\phi(t) = A(t)x_1\,,\ \tilde f(t,y,u) = f(t, y + x_1, u)\,.$ Предположим, что

$$||\tilde f(t,y,u) + \phi(t)|| \le \psi(t)||y|| + \eta(t, u(t)),$$

где $\psi \in C([t_0, +\infty), R)$, $\eta \in C([t_0, +\infty) \times R^m, R)$.

Тогда будем иметь

$$||y(t)|| \leq \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) exp\left(\int\limits_{l}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) dl + ||x_0 - x_1|| exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) =$$

$$= exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) [||x_0 - x_1|| +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) exp\left(\int\limits_{l}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds - \int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s)ds)\right) dl\ ] =$$

$$= exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) \left[||x_0 - x_1|| + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) exp\left(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds\right) dl\right]$$

Последнее выражение при $t \mapsto +\infty$ должно стремиться к нулю. Рассмотрим

$$\lim_{t \to \infty} \frac{||x_0 - x_1|| + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds) dl}{exp(-\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds)}.$$

Предположим, что выполняется одна из следующих альтернатив

1. $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = -\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds) dl = \infty$,

2. $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = +\infty$, $||x_0 - x_1|| + \int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds) dl = 0$

а функция $u(t)$ такова, что к пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\eta(t, u(t)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds)}{-exp(-\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s))ds)(\Lambda(t) + \psi(t))} = -\lim_{t \to +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.2. *Если для системы (1.6) и управления $u(t)$ выполняется одна из следующих альтернатив*

1) $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = -\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds) dl = \infty$,

2) $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \psi(s))ds = +\infty$, $||x_0 - x_1|| \int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \psi(s))ds) dl = 0$

и $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \psi(t)} = 0$, *то любую точку* $x_0 \in R^n$ *можно перевести в точку* $x_1 \in R^n$ *за бесконечное время по траектории системы (1.6).*

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Саранск: изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., 1990, 224 с.

2. Воскресенский Е. В., *Асимптотические методы: Теория и приложения*, Саранск: СВМО, 2001, 300 с.

3. Зубов В. И., *Лекции по теории управления*, М. : Наука, гл. ред. физ.мат. лит., 1975, 495 с.

4. Зубов В. И., *Теория колебаний: Учеб. пособие для университетов*, М. : Высш. школа, 1979, 400 с.

5. Павлов А. Ю., *Методы сравнения и управляемость нелинейных систем*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Саранск, 1995, 143 с.

6. Чезари Л., *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Мир, 1964, 480 с.

Controllability for infinite time and asymptotic equilibrium

© **A. Yu. Pavlov**[2]

Abstract. On the basis of generalization of Wazewski inequality the author obtained classes of differential equations systems, for which the existence of asymptotic equilibrium equations in the first approximation is not necessary condition of controllability infinite time. The article considers the example of a scalar equation, which the first approximation has no asymptotic equilibrium, although it itself is controlled for an infinite time.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, controllability in finite and infinite time, asymptotic equilibrium

[2] Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk, korspa@yandex.ru