УДК 519.624

Регуляризованный непрерывный метод второго порядка для аккретивных включений

© **И. П. Рязанцева**[1]

Аннотация. Рассмотрены уравнения с многозначными аккретивными операторами в банаховом пространстве, решения которых понимаются в смысле включения. С помощью резольвенты эти уравнения сводятся к уравнениям с однозначными операторами. Для построенных задач предлагается регуляризованный непрерывный метод второго порядка, в некотором классе банаховых пространств получены достаточные условия его сильной сходимости.

Ключевые слова: аккретивный оператор, дуальное отображение, резольвента, непрерывный метод, сходимость.

1. Основные предположения, вспомогательные утверждения и постановка задачи

Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, X^* – его сопряженное, $\langle x, y\rangle$ – значение линейного функционала $x \in X^*$ на элементе $y \in X$, $J^s : X \to X^*$ – дуальное отображение в X с масштабной функцией $\mu(t) = t^{s-1}$, $s \geq 2$, при $s = 2$ имеем нормализованное дуальное отображение $J : X \to X^*$ (см. [1], с.65).

Предположим, что оператор $A : X \to X$ обладает свойством обратной сильной псевдоаккретивности (см. [2])

$$\langle J^s(u-v), Au - Av\rangle \geq M\|Au - Av\|^s \quad \forall u, v \in X, \quad M > 0, \tag{1.1}$$

а $B : X \to 2^X$ – m-аккретивное отображение, т.е. $R(\gamma B + E) = X$ при всех $\gamma > 0$, $E : X \to X$ – единичный оператор.

Рассмотрим в X уравнение

$$Ax + Bx = f \tag{1.2}$$

с многозначным оператором, решение которого понимается в смысле включения

$$f - Ax \in Bx.$$

Пусть (1.2) имеет непустое множество решений N. В наших предположениях относительно свойств операторов A и B задача решения уравнения (1.2) является некорректной, поэтому для её решения необходимо использовать методы регуляризации. В настоящей заметке для решения (1.2) строится непрерывный метод регуляризации второго порядка, устанавливаются достаточные условия его сильной сходимости. Методы первого порядка для (1.2) изучались в [2]. Интерес к методам второго порядка вызван возможностью полнее учесть в начальных условиях априорную информацию о искомом решении. Для уравнений с однозначными аккретивными операторами регуляризованные методы второго порядка изучались в [3], [4].

Предположим, что оператор J^s обладает свойством

$$\|J^s u - J^s v\| \leq C(R)\|u - v\|^\sigma, \quad \sigma \in (0, 1], \quad \|u\| \leq R, \quad \|v\| \leq R, \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

где $C(R)$ – неубывающая неотрицательная функция при $R \geq 0$.

Отметим, что из (1.1) следует аккретивность оператора A и справедливость для него условия Липшица с постоянной $L = 1/M$, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq \frac{1}{M}\|u - v\| \quad \forall u, v \in X. \tag{1.4}$$

Таким образом, оператор A в наших условиях непрерывен.

В [2], [5] на основании (1) и (1.3) установлено неравенство

$$\langle J^s(v - w), Au - Av\rangle \leq \frac{C^m(R)}{\tilde{M}}\|u - w\|^{m\sigma}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{m} = 1, \quad \sigma \in (0, 1], \tag{1.5}$$

где $R \geq \max\{\|v - w\|, \|v - u\|\}$, $\tilde{M} = s^{1/(s-1)}M$.
Вопрос о справедливости (1.3) исследован в [5], где в пространствах Лебега l^p, $L^p(G)$ (G – ограниченная измеримая область в R^n) установлены неравенства вида (1.3) при определённых согласованиях s и p.

Исследование сходимости непрерывного метода регуляризации опирается на установленную сходимость операторного метода регуляризации, который для (1.2) определяется следующим уравнением [6]

$$Ax + Bx + \alpha(t)x = f, \tag{1.6}$$

где $\alpha(t)$ – положительная функция при $t \geq t_0 \geq 0$, причем

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0. \tag{1.7}$$

В наших предположениях в [7] доказана однозначная разрешимость (1.6) при всех $t \geq t_0$, т.е. существует единственный элемент $x_\alpha(t) \in X$ такой, что

$$f - Ax_\alpha(t) - \alpha(t)x_\alpha(t) \in Bx_\alpha(t) \quad \forall t \geq 0$$

или

$$Ax_\alpha(t) + y_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) = f, \quad y_\alpha(t) \in Bx_\alpha(t), \tag{1.8}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = x^*, \tag{1.9}$$

здесь $x^* \in N$ и однозначно определяется неравенством

$$\langle J^s(x^* - x), x^*\rangle \leq 0 \quad \forall x \in N. \tag{1.10}$$

Далее считаем, что условия, при которых справедливо (1.9), выполнены.

2. Непрерывный метод регуляризации второго порядка

Поскольку всякий метод регуляризации должен быть устойчив относительно возмущений данных решаемой задачи, то считаем, что вместо A, B и f известны их приближения соответственно $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$, которые при каждом $t \geq t_0$ обладают следующими свойствами :
(I) величины $A(t)u$, $f(t)$ непрерывны по t при каждом фиксированном $u \in X$;

(II) оператор $A(t) : X \to X$ обладает свойством обратной сильной псевдоаккретивности, т. е.

$$\langle J^s(u-v), A(t)u - A(t)v\rangle \geq M^{s-1}\|A(t)u - A(t)v\|^s \quad \forall u, v \in X,\ s \geq 2,\ M > 0, \tag{2.1}$$

и

$$\|A(t)u - Au\| \leq h(t)p(\|u\|) \quad \forall u \in X; \tag{2.2}$$

(III) $B(t) : X \to 2^X$ – m-аккретивный оператор, оператор $B : X \to 2^X$ ограниченный и m-аккретивный,

$$r_X(Bu, B(t)u) \leq \tilde{h}(t)q(\|u\|) \quad \forall u \in X, \tag{2.3}$$

кроме того, семейство операторов $\{B(t)\}$ обладает свойством: для любого фиксированного элемента $v \in X$ и любого числа $\epsilon > 0$ найдётся число $\tilde{\delta}(\epsilon, v) > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}$ для любого элемента $y \in B(t_1)v$ существует элемент $\tilde{y} \in B(t_2)v$ такой, что $\|y - \tilde{y}\| < \epsilon$;
(IV) $\|f(t) - f\| \leq \delta(t)$.
Здесь $r_X(M_1, M_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами M_1 и M_2 из X (см. [1], с. 18), $p(\theta)$ и $q(\theta)$ – ограниченные функции, т. е. переводящие ограниченные множества в ограниченные, $\theta \geq 0$, $h(t), \tilde{h}(t), \delta(t)$ – неотрицательные функции, являющиеся бесконечно малыми при $t \to \infty$.

Отметим, что из (2.1) следует при каждом $t \geq t_0$ аккретивность оператора $A(t)$ и справедливость для него условия Липшица (сравни с (1.4))

$$\|A(t)u - A(t)v\| \leq \frac{1}{M}\|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \tag{2.4}$$

и предположение (2.2) позволяет получить из (2.1) и (2.4) свойства (1.1) и (1.4) оператора A. Кроме того, из (2.2), (2.3) и ограниченности отображений A и B вытекает ограниченность в совокупности семейств операторов $\{A(t)\}$ и $\{B(t)\}$.

Пусть $I_B^{\gamma(t)} = (\gamma(t)B + E)^{-1}$ – резольвента оператора B, $\gamma(t)$ – положительная дважды дифференцируемая убывающая выпуклая вниз при $t \geq t_0$ функция,

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда от (1.8) придем к уравнению

$$x_\alpha(t) = I_B^{\gamma(t)}(x_\alpha(t) - \gamma(t)[Ax_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) - f])$$

с однозначными операторами.

Далее функцию $\alpha(t)$ дополнительно считаем дважды дифференцируемой убывающей и выпуклой вниз на $[t_0, +\infty)$. Очевидно, что свойства функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ сохраняются и для функции $\beta(t) = \alpha(t)\gamma(t)$ при $t \geq t_0$.

Непрерывный метод второго порядка для последнего уравнения при приближённом задании данных имеет вид следующей задачи Коши (см., например, [8])

$$u''(t) + \mu u'(t) + u(t) = I_{B(t)}^{\gamma(t)}(u(t) - \gamma(t)[A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)]), \ \ \mu > 0, \tag{2.6}$$

$$u(t_0) = u_0 \in X, \ \ u'(t_0) = u'_0 \in X, \tag{2.7}$$

здесь и далее $I_{B(t)}^{\gamma(t)} = (\gamma(t)B(t) + E)^{-1}$.

Однозначная разрешимость этой задачи в классе функций $C^2[t_0,\infty)$ устанавливается в наших условиях теми же рассуждениями, что и в [9], [10] с применением результатов [11], с. 399 – 401.

Исследуем стабилизацию $u(t)$ при $t\to\infty$ к решению x^* уравнения (1.2), при этом будем использовать идеи из [12], гл. 2, §10.

Пусть $x_\alpha(\tau)$ – решение (1.6) при $t=\tau$, где τ – некоторое действительное число. Значит, согласно (1.8), верно равенство

$$Ax_\alpha(\tau)+y_\alpha(\tau)+\alpha(\tau)x_\alpha(\tau)=f. \tag{2.8}$$

Определим функцию

$$r(t,\tau)=\|u(t)-x_\alpha(\tau)\|^s/s, \tag{2.9}$$

тогда

$$r'_t(t,\tau)=\langle J^s(u(t)-x_\alpha(\tau)),u'(t)\rangle, \tag{2.10}$$

$$r''_{tt}(t,\tau)=\langle J^s(u(t)-x_\alpha(\tau)),u''(t)\rangle+\left\langle\frac{dJ^s(u(t)-x_\alpha(\tau))}{dt},u'(t)\right\rangle. \tag{2.11}$$

От (2.6) перейдем к эквивалентному уравнению

$$u''(t)+\mu u'(t)+\gamma(t)[B(t)(u''(t)+\mu u'(t)+u(t))+A(t)u(t)+\alpha(t)u(t)-f(t)])=0.$$

Следовательно, при каждом $t\geq t_0$ найдётся элемент $\xi(t)\in B(t)(u''(t)+\mu u'(t)+u(t))$ такой, что справедливо равенство

$$u''(t)+\mu u'(t)+\gamma(t)[\xi(t)+A(t)u(t)+\alpha(t)u(t)-f(t)]=0. \tag{2.12}$$

Теперь, введя обозначение $v(t)=u''(t)+\mu u'(t)+u(t)$, из (2.12) и (2.8), умноженном на $\gamma(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\langle J^s(v(t) &- x_\alpha(\tau)),u''(t)+\mu u'(t)\rangle+\gamma(t)[\langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),\xi(t)-y_\alpha(\tau)\rangle+\\ &+ \langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),A(t)u(t)-Ax_\alpha(\tau)\rangle]+\beta(\tau)\langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),u(t)-x_\alpha(\tau)\rangle=\\ &= \alpha(\tau)[\gamma(t)-\gamma(\tau)]\langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),x_\alpha(\tau)\rangle+\\ &+ [\beta(\tau)-\beta(t)]\langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),u(t)\rangle+\gamma(t)\langle J^s(v(t)-x_\alpha(\tau)),f(t)-f\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для оценки слагаемых, входящих в (2.13), будем использовать свойство (1.3) дуального отображения J^s. Поскольку оно верно на ограниченных множествах, то нам необходима ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|,\|u(t)\|,\|u'(t)\|,\|u''(t)\|$ при $t\geq t_0,\tau\geq t_0$. Прежде всего отметим ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|$, вытекающую из (1.9). Для установления ограниченности остальных функций сделаем дополнительное предположение (сравни с [13]).

Пусть для некоторого $R>0$ и любой функции $y(t)\in C^2[t_0,\infty)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\mu\|y'(t)\|^2 \;&-\; \langle Jy(t),y'(t)\rangle+\langle Jy'(t),y(t)-I^{\gamma(t)}_{B(t)}(y(t)-\gamma(t)[A(t)y(t)+\alpha(t)y(t)-f(t)])\rangle\geq 0\\ &\text{при}\quad \|y(t)\|^2+\|y'(t)\|^2\geq R_0^2.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Теперь, подобно [13], используя (1.8), (2.2), (IV), (2.5), (2.6), (2.14) и нерастяжимость резольвенты, убеждаемся в существовании положительной постоянной R_1 такой, что

$$\|x_\alpha(\tau)\|\leq R_1,\;\; \|w(t)\|\leq R_1,\;\; \|w'(t)\|\leq R_2,\;\; \|w''(t)\|\leq R_3\quad \forall\tau\geq t_0,\;\; \forall t\geq t_0. \tag{2.15}$$

Следовательно, из (2.12) вытекает неравенство

$$\|u''(t) + \mu u'(t)\| \le a_1\gamma(t), \ \ a_1 > 0, \ \ t \ge t_0. \tag{2.16}$$

Всюду далее a_k – положительные постоянные. Теперь наша цель состоит в получении из (2.13) дифференциального неравенства второго порядка относительно функции $r(t,\tau)$ при $t \le \tau$, t, $\tau \in [t_0, +\infty)$. Для этого последовательно оценим слагаемые, входящие в (2.13).

Подобно [13] с учётом (2.10), (2.11) и монотонности оператора J^s придём к неравенству

$$\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u''(t) + \mu u'(t)\rangle \ge r''_{tt}(t,\tau) + \mu r'_t(t,\tau) - \left\langle \frac{d(J^s(u(t) - x_\alpha(\tau))}{dt}, u'(t)\right\rangle. \tag{2.17}$$

В силу предположения (2.3) для элемента $y_\alpha(\tau) \in Bx_\alpha(\tau)$ найдётся элемент $z_\alpha(t,\tau) \in B(t)x_\alpha(\tau)$ такой, что

$$\|z_\alpha(t,\tau) - y_\alpha(\tau)\| \le \tilde{h}(t)q(\|x_\alpha(\tau)\|) \le a_2\tilde{h}(t), \ \ t,\tau \ge t_0.$$

При записи последнего неравенства учтены свойства функции $q(s)$ и ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|$ при $\tau \ge t_0$. Теперь с учетом аккретивности оператора $B(t)$ и (2.15) имеем

$$\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), \xi(t) - y_\alpha(\tau)\rangle \ge -a_2\tilde{h}(t). \tag{2.18}$$

Свойство (1.5) оператора A, условие (2.2) и доказанные неравенства (2.15) обеспечивают справедливость следующих соотношений

$$\begin{aligned} &\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), A(t)u(t) - Ax_\alpha(\tau)\rangle = \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), [A(t)u(t) - Au(t)] + \\ +\ &[Au(t) - Ax_\alpha(\tau)]\rangle \ge -a_3\left[h(t) + \|u''(t) + \mu u'(t)\|^{m\sigma}\right], \\ &\frac{1}{m} + \frac{1}{s} = 1, \quad \sigma \in (0,1]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Далее, используя условие (1.3), определение (2.9) величины $r(t,\tau)$, числовое неравенство

$$ab \le \frac{a^m}{m} + \frac{b^s}{s}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{s} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{2.20}$$

и (2.15), имеем

$$\begin{aligned} \langle J^s(v(t)\ &-\ x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau)\rangle = \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)) - J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau)\rangle + \\ &+\ \langle J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau)\rangle \ge \|u(t) - x_\alpha(\tau\|^s - \\ &-\ a_4\|u''(t) + \mu u'(t)\|^\sigma \|u(t) - x_\alpha(\tau)\| \ge (s-1)r(t,\tau) - \\ &-\ a_5\|u''(t) + \mu u'(t)\|^{m\sigma}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Теперь неравенства (см. [12], с. 266)

$$\beta(t) - \beta(\tau) \le \beta'(t)(t-\tau), \qquad \gamma(t) - \gamma(\tau) \le \gamma'(t)(t-\tau), \qquad t \le \tau,$$

условия (1.7), (2.5), (IV) и оценки (2.15) – (2.19) и (2.21) позволяют от (2.13) перейти к следующему неравенству при $t \le \tau$

$$\begin{aligned} r''_{tt}(t,\tau)\ &+\ \mu r'_t(t,\tau) + (s-1)\beta(\tau)r(t,\tau) \le \left\langle \frac{d(J^s(u(t) - x_\alpha(\tau))}{dt}, u'(t)\right\rangle + \\ &+\ a_6\left\{\gamma(t)\left[(\gamma(t))^{m\sigma} + \delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)\right] + \right. \\ &+\ \left.\beta'(t)(t-\tau) + \alpha(t)\gamma'(t)(t-\tau)\right\}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Чтобы установить оценку сверху для первого слагаемого в правой части последнего неравенства, сделаем дополнительное предположение относительно геометрии пространства X.

Пусть справедливо неравенство

$$\left\|\frac{dJ^s(u(t)-x_\alpha(\tau))}{dt}\right\| \leq \lambda\|u'(t)\|, \quad \lambda > 0 \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.23}$$

Следовательно, получение указанной оценки свелось к нахождению оценки сверху для $\|u'(t)\|^2$ при $t \geq t_0$.
Вычисляя значение линейного функционала $Ju'(t)$ на элементах обеих частей равенства (2.12) и используя ограниченность в совокупности каждого из семейств операторов $\{A(t)\}$ и $\{B(t)\}$, предположения (1.7), (IV) и доказанные оценки (2.15), приходим к неравенству

$$\langle Ju'(t), u''(t)\rangle + \mu\langle Ju'(t), u'(t)\rangle \leq a_7\gamma(t)\|u'(t)\|.$$

Отсюда (см. [13]) имеем оценку

$$\|u'(t)\|^2 \leq a_8\left[\exp(-2\mu t) + \gamma^2(t)\right] \quad \forall t \geq t_0.$$

Теперь неравенство (2.22) перепишем в виде

$$r''_{tt}(t,\tau) + \mu r'_t(t,\tau) + (s-1)\beta(\tau)r(t,\tau) \leq a_9\Big\{\gamma(t)\left[\delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)\right] +$$

$$+\beta'(t)(t-\tau) + [\gamma(t)]^\eta + \exp(-2\mu t)\Big\} = a_9\Gamma(t,\tau), \quad t \geq \tau, \quad \eta = \max\{2, 1+m\sigma\}.$$

Отсюда получаем оценку (см. [13], [14])

$$r(t,\tau) \leq a_{10}\left[\exp(k_2(\tau)t) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(\xi,\tau)\exp(-k_2(\tau)(\xi-\tau))d\xi\right], \quad t \leq \tau,$$

здесь

$$k_2(\tau) = -\frac{\beta(\tau)(s-1)}{\mu} + o(\beta(\tau)).$$

При $t = \tau$ последнее неравенство принимает вид

$$r(\tau,\tau) \leq a_{10}\left[\exp(k_2(\tau)\tau) + \int_{t_0}^{\tau}\Gamma(\xi,\tau)\exp(-k_2(\tau)(\xi-\tau))d\xi\right].$$

Отсюда, используя правило Лопиталя, делаем вывод о том, что $r(\tau,\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, если $(t\beta(t))' > 0$ хотя бы при достаточно больших t,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\gamma(t)[\delta(t)| + h(t) + \tilde{h}(t)]}{(t\beta(t))'} = 0, \tag{2.24}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma^\eta(t)}{(t\beta(t))'} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\beta'(t)}{(t\beta(t))'' + [(t\beta(t))']^2} = 0. \tag{2.25}$$

Теперь с учётом (1.9) приходим к утверждению.

Теорема 2.1. *Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, дуальное отображение J^s с $s \geq 2$ обладает свойством (1.3), $B : X \to 2^X$ – m-аккретивный ограниченный оператор, $A : X \to X$ – однозначное отображение, уравнение (1.2) имеет непустое множество решений N, приближённые данные (1.2) $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ при $t \geq t_0$ обладают свойствами (I) – (IV). Положительные дважды дифференцируемые убывающие выпуклые вниз функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют условиям (1.7), (2.5). Тогда задача Коши (2.6), (2.7) имеет единственное решение $u(t) \in C^2[t_0, \infty)$. Пусть имеют место (2.14), (2.23), функция $\beta(t) = \alpha(t)\gamma(t)$ такова, что $(t\beta(t))' > 0$, хотя бы при достаточно больших t, и обладает свойствами (2.24), (2.25), тогда при любых u_0 и u_0' из X $u(t) \to x^*$ при $t \to \infty$, где x^* – решение уравнения (1.2), определяемое неравенством (1.10).*

Нетрудно убедиться, что при положительных α, γ, δ, h, $\tilde{h}$ функции $\alpha(t) = t^{-\alpha}$, $\gamma(t) = t^{-\gamma}$ (т.е. $\beta(t) = t^{-(\alpha+\gamma)}$), $\delta(t) = t^{-\delta}$, $h(t) = t^{-h}$, $\tilde{h}(t) = t^{-\tilde{h}}$ при $0 < \alpha < \max\{\delta,\ h,\ \tilde{h}\}$, $\alpha < \gamma(\eta - 1)$, $\alpha + \gamma < 1$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Отметим также, что для функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ степенного типа второе равенство в (2.24) принимает вид классического достаточного условия сходимости операторного метода регуляризации

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)}{\alpha(t)} = 0,$$

а для функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ экспоненциального типа $\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$, $\gamma(t) = \exp(-\gamma t)$ нарушается первое предельное равенство в (2.24).

Замечание 2.1. *Поясним, как установлено достаточное условие ограниченности $w(t)$ и $w'(t)$ на $[t_0, \infty)$ в форме (2.14). Легко проверить, что неравенство*

$$\langle Jy(t), C(t)y(t) - f(t)\rangle \geq 0 \ \ \forall t \geq t_0 \ \text{ при } \ \|y(t)\| \geq r_0 > 0, \quad C(t) : X \to X, \tag{2.26}$$

обеспечивает ограниченность на $[t_0, \infty)$ решения дифференциального уравнения

$$y'(t) + C(t)y(t) = f(t). \tag{2.27}$$

Чтобы использовать этот факт, от уравнения (2.6) был сделан переход к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, для которой условие типа (2.26) в пространстве $X\times X$ приняло вид (2.14). Кроме того, (2.26) есть одно из достаточных условий разрешимости уравнения $C(t)x = f(t)$ при $t \geq t_0$ (см. [1], с.158).

Уравнения с многозначными аккретивными операторами изучались многочисленными авторами (см., например, [15], [16] и приведённую там библиографию).

Список литературы

1. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

2. Рязанцева И.П., “Методы регуляризации первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54**:11 (2014), 1711–1723..

3. Рязанцева И.П., Бубнова О.Ю., “Непрерывный метод второго порядка для нелинейных аккретивных уравнений в банаховом пространстве”, *Труды Средневолжского математического общества*, **3 - 4**:6 (2002), 327–334..

4. Бубнова О.Ю., “Методы итеративной регуляризации второго порядка для нелинейных аккретивных уравнений в банаховом пространстве”, *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2001, № 2(24), 219–228.

5. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы девятой Всероссийской конференции*, 2012, 321–326.

6. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

7. Нгуен Бьонг, Нгуен Тхи Хонг Фьонг, “Методы регуляризации для нелинейных некорректных уравнений, содержащих m-аккретивные отображения в банаховом пространстве”, *Известия вузов. Математика*, 2013, № 2, 67–74..

8. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем*, 1989, 5 - 43.

9. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы восьмой Всероссийской конференции*, 2010, 373 - 379.

10. Рязанцева И.П., “О непрерывных методах первого порядка и их регуляризованных вариантах для смешанных вариационных неравенств”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:7 (2012), 1020–1032.

11. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.

12. Васильев Ф.П., *Методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1981.

13. Рязанцева И.П., “Методы второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:9 (2014), 1264–1275.

14. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод решения задач условной минимизации”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **39**:5 (1999), 734–742..

15. t Morales C.H, “Surjectivity theorems for multi-valued mappings of accretive type”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **26** (1985), 397 – 413.

16. He X., “On ϕ-strongly accretive mappings and some set-valued variational problems”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **227** (2003), 504 – 511.

Second-order regularized continuous method for accretive inclusions

© I. P. Ryazantseva[2]

Abstract. We consider equations with set-valued accretive operators in Banach space, whose solutions are understood in the sense of inclusion. By using the resolvent, we reduce these equations to equations with single-valued operators. For the constructed problems, we suggest a regularized continuous method and obtain sufficient conditions for their strong convergence in some class of Banach spaces.

Key Words: accretive operator, duality mapping, resolvent, continuous method, convergence

[2] Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R. E. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru