УДК 517.929

О нелинейных задачах для функционально-дифференциального уравнения

© А. С. Ларионов[1], П. М. Симонов[2]

Аннотация. Приводятся утверждения о разрешимости нелинейных задач для дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом. Утверждения получены на основе монотонной итеративной техники.

Ключевые слова: изотонные и антитонные операторы, верхнее и нижнее решения, оператор внутренней суперпозиции, задача Коши – Николетти, модель Мэкки – Гласа.

1. Введение

Нелинейные начальные и краевые задачи для дифференциальных уравнений на протяжении длительного времени являются объектом интенсивного изучения благодаря многочисленным приложениям (в биологии, химии, математической экономике, экологии, задачах управления техническими системами и т.д.). Такие задачи естественно возникают при математическом моделировании явлений, для которых линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможны. Значительная часть результатов исследований нелинейных задач и библиография приведена в монографиях [10], [6], [16], [11] и обзорах [13], [14].

Центральное место при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений занимают вопросы разрешимости. Для обыкновенных дифференциальных уравнений широко известен аналитический метод интегрирования — метод Чаплыгина, в основе которого лежит теорема о дифференциальном неравенстве для скалярного уравнения $\dot{x} = f(t, x),\ \ t \in [a, b]$. Эта теорема не предполагает никаких специальных ограничений на функцию f. Естественным образом возник вопрос о перенесении метода Чаплыгина на другие классы уравнений, в частности, на функционально-дифференциальные уравнения.

Одним из эффективных методов доказательства существования решения нелинейной краевой или начальной задачи является, как отмечено в обзоре [12], монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к уравнению

$$x = Ax \tag{1.1}$$

с монотонным оператором A, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Существует ряд схем, позволяющих свести рассматриваемую задачу к операторному уравнению (1.1). Различные варианты этих схем, по–видимому, впервые стал систематически использовать в своих работах Н.В.Азбелев. Впоследствии эти схемы нашли широкое применение в исследованиях о дифференциальных, интегральных, разностных и других неравенствах, вошли в современные монографии и обзоры.

Характерные свойства уравнения (1.1) с изотонным (из $x_1 \leq x_2$ следует, что $Ax_1 \leq Ax_2$) оператором A состоят в том, что при некоторых естественных предположениях для

[1] Доцент кафедры математики, Братский государственный университет, г. Братск; larios84@yandex.ru
[2] Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

этого уравнения справедлива теорема Тарского – Биркгофа – Канторовича [9] о разрешимости этого уравнения и о существовании упорядоченной пары решений. Основным вспомогательным аппаратом при таком подходе к исследованию разрешимости нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений является метод дифференциальных неравенств (метод верхних и нижних решений). Распространение на функционально-дифференциальные уравнения упомянутого метода изучения нелинейных задач потребовало специальных исследований условий сохранения знака функции Грина вспомогательных линейных краевых задач (функции Коши вспомогательного линейного уравнения) [4].

Значительный вклад в построение общей теории функционально-дифференциальных уравнений вносят представители научной школы Н.В. Азбелева. Предлагаемая работа примыкает к исследованиям пермских математиков по упомянутой проблеме.

2. Основные теоремы

Всюду ниже используются следующие обозначения.

$L_p = L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$ — банахово пространство функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}$, суммируемых на $[a,b]$ со степенью p; $L_\infty = L_\infty[a,b]$ — банахово пространство функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеримых и ограниченных в существенном; $AC_p = AC_p[a,b]$ — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, что $\dot{x} \in L_p$; $C = C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - b(t)\dot{x}_g(t) + p(t)x_h(t) = f(t, x_h(t)), \quad t \in [a,b], \tag{2.1}$$

где обозначено

$$y_r(t) = \begin{cases} y[r(t)], & \text{если } r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если } r(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Дополнительное условие для уравнения (2.1) зададим в виде равенства

$$x(a) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Начальную задачу (2.1), (2.2) рассмотрим в следующих предположениях: функция $b : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима и ограничена в существенном; функции g, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ измеримы $g(t) \le t$, $h(t) \le t$ при почти всех $t \in [a,b]$, функция $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Будем предполагать также, что функция g удовлетворяет условиям:

$$(i) \text{ mes } g^{-1}(e) = 0 \text{ (здесь } g^{-1}(e) = \{t \in [a,b] : g(t) \in e\}) \tag{2.3}$$

для любого множества $e \subset [a,b]$ нулевой меры и, кроме того, для $1 \le p < \infty$ имеет место

$$\mu = \left\{ \sup_{e \subset [a,b]} \frac{\text{mes } g^{-1}(e)}{\text{mes } e} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем таким подмножествам e отрезка $[a,b]$, что $\text{mes } e > 0$; (ii) существует такое $\tau > 0$, что либо множество $\kappa = \{t \in [a,b] : t - g(t) \le \tau,\ g(t) \ge a\}$ пусто, либо $\mu \operatorname{vrai\,sup}_{t\in\kappa} |b(t)| < 1$.

Условие (i) обеспечивает [3], [1], [2] непрерывное действие оператора внутренней суперпозиции S, определяемого равенством $(Sy)(t) = b(t)y_g(t)$ в пространстве $L_p[a,b]$,

$1 \le p < \infty$; при этом число μ, определенное в условии (i), является нормой оператора S в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$. Для непрерывного действия оператора S в пространстве L_∞ достаточно [3] выполнения условия (2.3), при этом $\mu = \|S\|_{L_\infty \to L_\infty} = 1$ (см. также [1], [2]). При сделанных предположениях оператор $\mathcal{L}$ непрерывно действует из пространства AC_p в пространство L_p и вольтерров.

При выполнении условия (ii) спектральный радиус оператора S меньше единицы [3].

Решением задачи (2.1), (2.2) будем называть функцию $x \in AC_p$, удовлетворяющую начальному условию (2.2) и почти всюду на $[a,b]$ уравнению (2.1).

Для $v,\, z \in L_\infty[a,b]$ обозначим $[v,\, z] \,=\, \{x \in L_\infty : v \le x \le z\}$.

Будем говорить [4], [1], что функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию $L^1[v,z]$ $(L^2[v,z])$, если существуют такие функции $r^1(t)$ $(r^2(t))$, $r^1,\, r^2 \in L_p$, что оператор Немыцкого $M^1 : [v,z] \to L_p$ $(M_2 : [v,z] \to L_p)$, определяемый равенством $(M^1u)(t) = f(t,u) + r^1(t)u$ $((M^2u)(t) = f(t,u) + r^2(t)u)$, изотонен (антитонен).

Обозначим

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b] \end{cases}$$

и приведем утверждение о разрешимости начальной задачи (2.1), (2.2) в некотором порядковом отрезке.

Теорема 1. Пусть $b(t)\,\sigma_g(t) \ge 0$ и выполнены условия:

1) существуют функции $v,\ z \in L_\infty$ такие, что $v \le z$ и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливы неравенства

$$(\mathcal{L}v)(t) \le\ f(t, v_h(t)),\ (\mathcal{L}z)(t) \ge\ f(t, z_h(t)),\ v(a) \le\ x(a) \le z(a);$$

2) функция $f(t,\ u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что функция Коши $C^1(t,s)$ уравнения

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^1(t)x_h(t) = \eta_1(t),\ t \in [a,b] \tag{2.4}$$

неотрицательна в области $\Delta = \{(t,s) \in [a,b] \times [a,b] :\ a \le s \le t \le b\}$.

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v \le x \le z$.

Если, кроме того,

3) функция $f(t,\ u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что функция Коши $C^2(t,s)$ уравнения

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^2(t)x_h(t) = \eta_2(t),\ \ t \in [a,b] \tag{2.5}$$

неотрицательна в области Δ, то это решение единственно.

Доказательство. При выполнении условия 2 теоремы 1 начальная задача (2.1), (2.2) эквивалентна уравнению (1.1), где оператор $A : [v,z] \to C$ определен равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_a^t C^1(t,s)\, M^1(s,\ x_h(s))\, ds + \xi^1(t).$$

Здесь $\xi^1(t)$ — решение полуоднородной задачи $(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0,\ t \in [a,b],\ x(a) = \alpha.$.

Оператор A изотонен и вполне непрерывен. Покажем, что из неравенств

$$(\mathcal{L}v)(t)\ \le\ f(t, v_h(t)),\ v(a)\ \le\ x(a)$$

следует, что $v \le Av$. Действительно, из первого неравенства вытекает

$$(\mathcal{L}v)(t) \le \int\limits_a^t C^1(t,s)\, M^1(s,\, x_h(s))\, ds + v^1(t),$$

где $v^1(t)$ — решение задачи $(\mathcal{L}_1 x)(t) = \eta_1(t),\ t \in [a,b],\ x(a) = v(a).$.

Обозначив $\theta(t) = \xi^1(t) - v^1(t)$, получаем, что $\theta(t)$ является нетривиальным решением уравнения $(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0$. В работе [7] показано, что неотрицательность функции Коши уравнения $(\mathcal{L}_1 x)(t) = \eta(t)$ эквивалентна тому, что нетривиальное решение уравнения $(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0$ не обращается в нуль на $[a,\, b]$. Так как $v(a) \le x(a)$, то отсюда заключаем, что $\theta(t) \ge 0$, то есть $\xi^1(t) \ge v^1(t)$, следовательно, неравенство $v \le Av$ установлено. Неравенство $z \ge Az$ получается аналогично. Таким образом, вполне непрерывный оператор A отображает множество $[v,\, z]$ в себя, следовательно, оператор A имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v,\, z]$. Существование решения краевой задачи (1.1), (2.1) в порядковом интервале доказано.

Для доказательства единственности решения краевой задачи (1.1), (2.1) в порядковом отрезке $[v,\, z]$ заметим, что в условиях теоремы существуют "верхнее" $\bar{x}$ и "нижнее" $\underline{x}$ решения этой задачи, причем $v \le \underline{x} \le x \le \overline{x} \le z$. При выполнении условия 3 теоремы 1 исходная задача (2.1), (2.2) редуцируется к эквивалентному уравнению $x = Bx$, где оператор $B : [v, z] \to C$ определяется равенством

$$(Bx)(t) = \int\limits_a^t C^2(t,s)\, M^2(s,\, x_h(s))\, ds + \xi^2(t). \tag{2.6}$$

Здесь функция $\xi^2(t)$ есть решение краевой задачи

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) = 0,\ t \in [a,b],\ x(a) = \alpha.$$

Оператор B антитонен. Отсюда можно получить противоположное неравенство $\underline{x} \ge \overline{x}$, что завершает доказательство теоремы.

В приводимой ниже теореме доказывается существование решения начальной задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2. Пусть $b(t)\,\sigma_g(t) \ge 0$ и существуют функции $v,\, z \in L_\infty$ такие, что $v \le z$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t,\, u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что функция Коши $C^2(t,s)$ уравнения (2.5) неотрицательна в области Δ;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_2 v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^2(t) v_h(t) \le f(t,\, z_h(t)) + r^2(t) z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_2 z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^2(t) z_h(t) \ge f(t,\, v_h(t)) + r^2(t) v_h(t),\ t \in [a,b],\quad v(a) \le x(a) \le z(a).$$

Тогда начальная задача (2.1), (2.2) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v \le x \le z$.

Приведем схему **доказательства теоремы 2**. При выполнении условия 1 теоремы 2 начальная задача (2.1), (2.2) эквивалентна уравнению $x = Bx$, где оператор $B : [v, z] \to C$ определен равенством (2.6). Оператор B антитонен и вполне непрерывен. Из дифференциальных неравенств, входящих в условие 2 теоремы 2, следует, что $v \le Bz$ и $z \ge Bv$, то есть вполне непрерывный оператор B отображает множество $[v,\, z]$ в себя, следовательно, оператор B имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v,\, z]$. Существование решения краевой задачи (2.1), (2.2) в порядковом интервале $[v,\, z]$ доказано.

Рассмотрим для уравнения (2.1) задачу Коши – Николетти с краевым условием

$$x(b) = \alpha. \tag{2.7}$$

Приедем утверждения о разрешимости краевой задачи (2.1), (2.7).

Теорема 3. Пусть $b(t)\,\sigma_g(t) \geq 0$ и существуют функции $v,\, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t,\, u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что краевая задача

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^2(t)x_h(t) = \eta_2(t),\ t \in [a,b],\ x(b) = 0 \tag{2.8}$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G^2(t,s)$ неположительна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_2 v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^2(t)v_h(t) \leq f(t,\, z_h(t)) + r^2(t)z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_2 z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^2(t)z_h(t) \geq f(t,\, v_h(t)) + r^2(t)v_h(t),\ t \in [a,b],\ v(b) \leq\ x(b) \leq z(b).$$

Тогда краевая задача (2.1), (2.7) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v\ \leq x \leq z$.

Если, кроме того, функция $f(t,\, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что краевая задача

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^1(t)x_h(t) = \eta_1(t),\ t \in [a,b],\ x(b) = 0 \tag{2.9}$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G^1(t,s)$ неположительна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, то это решение единственно.

Теорема 4. Пусть $b(t)\,\sigma_g(t) \geq 0$ и существуют функции $v,\, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t,\, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что краевая задача (2.9) однозначно разрешима и ее функция Грина $G^1(t,s)$ неположительна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_1 v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^1(t)v_h(t) \leq f(t,\, z_h(t)) + r^1(t)z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_1 z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^1(t)z_h(t) \geq f(t,\, v_h(t)) + r^1(t)v_h(t),\ t \in [a,b],\ v(a) \leq\ x(a) \leq\ z(a).$$

Тогда краевая задача (2.1), (2.7) имеет решение x x, удовлетворяющее неравенствам $v\ \leq x \leq z$.

Доказательства теорем 3 и 4 проводятся по тем же схемам, что и доказательства теорем 1 и 2.

Замечание. Эффективные признаки неотрицательности функции Коши $C(t,\,s)$ вспомогательных линейных уравнений приведены в работах [7], [5]; условия неположительности функции Грина вспомогательных линейных краевых задач сформулированы в работе [7].

В качестве применения теоремы 1 рассмотрим математическую модель производства клеток крови [15], [8], являющейся частным случаем приведенной выше начальной задачи (2.1), (2.2)

$$\dot{x}(t) + px(t) = \frac{mx(t-\tau)}{c + x^n(t-\tau)},\ t \in [a,b], \tag{2.10}$$

$$x(a) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

где $p > 0$, $m > 0$, $c > 0$, $n > 1$, $0 \le \tau < \infty$.

Обозначим $\sigma_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t-\tau \in [a,\ b], \\ 0, & \text{если} \quad t-\tau \notin [a,\ b] \end{cases}$ и приведем утверждение о разрешимости задачи (2.10), (2.11).

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1) имеет место неравенство $p \ge \frac{1}{t}\left[\frac{m(t-\tau)}{c+(t-\tau)^n} - 1\right]$, $t \in [a,\ b]$,

2) существует такая функция $r(t) \ge 0$, что справедливо неравенство $p + r(t)\sigma_\tau(t) \le \frac{1}{e}$, $t \in [a,\ b]$.

Тогда существует решение задачи (2.10), (2.11), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le x \le t.$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке условий теоремы 1, где в качестве функций v и z выбраны соответственно $v = 0$, $z = t$.

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф., *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991, 278 с.

2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф., *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2002, 384 с.

3. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф., “Функционально-дифференциальные уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **14**:5 (1978), 771–797.

4. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф., “К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах”, *Функц.-дифференц. уравнения: сб. науч. тр.*, 1986, 3–9.

5. Березанский Л. М., Ларионов А. С., “Положительность матрицы Коши линейного функционального уравнения”, *Дифференц. уравнения.*, **24**:11 (1988), 1843–1854.

6. Васильев Н. И., Клоков Ю. А., *Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Зинатне, Рига, 1978, 184 с.

7. Домошницкий А. И, “Знакопостоянство функции Коши и устойчивость линейного уравнения нейтрального типа по правой части”, *Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр.*, 1986, 44–48.

8. Дьери И., Перцев Н. В., *Устойчивость положения равновесия систем функционально-дифференциальных уравнений, обладающих свойством смешанной монотонности. Применение к моделям биологических процессов. Препринт №126*, Отдел вычислительной математики АН СССР, М., 1986, 384 с.

9. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, Гостехиздат, М.-Л., 1950, 548 с.

10. Кигурадзе И. Т., *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси, 1978, 352 с.

11. Максимов В. П., *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, Пермь, 2003, 306 с.

12. Митропольский Ю. А., Лила С., Мартынюк А. А., "О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их приложениям", *Дифференц. уравнения*, **22**:4 (1986), 555–572.

13. Conti R., "Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations", *Boll. Unione mat.*, **22**:2 (1967), 135–178.

14. Lakshmikantham V., "The present state of the method of upper and lower solutions", *Trends in theory and practice of nonlinear differential equations / Proceedings of the International Conference*, 1983, 285–299.

15. Mackey M. C., Glass L., "Oscillations and chaos in physiological control systems", *Science*, **197** (1977), 287–289.

16. Scwabik S., Tvrdy M., Veivoda O., *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints*, Academia, Praha, 1979, 252 pp.

On nonlinear problems for functional differential equation

© A. S. Larionov[3], P. M. Simonov[4]

Abstract. Given the approval of the solvability of nonlinear problems for first order differential equation with retarded argument. The statements are derived from the monotone iterative technique.

Key Words: Isotonic and antitonic operators, upper and lower solutions, the operator of internal superposition, a problem of Cauchy – Nicoletti, a model of Mackey – Glass

[3] Docent of the Department of Mathematics, Bratsk State University, Bratsk, larios84@yandex.ru

[4] Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm, simpm@mail.ru