УДК 517.9

Многоцветный граф как полный топологический инвариант потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях

© **В.Е. Круглов[1], О.В. Починка[2]**

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются непрерывные динамические системы на поверхностях. Для содержательного класса потоков с конечным числом особых траекторий вводится понятие многоцветного графа и доказывается, что класс топологической эквивалентности такого потока полностью определяется классом изоморфности его многоцветного графа.

Ключевые слова: многоцветный граф, поток, топологическая эквивалентность

1. Введение

Непрерывной динамической системой или *потоком* на поверхности S называется непрерывное отображение $f : S \times \mathbb{R} \to S$ с групповыми свойствами:

1) $f(x,0) = x \ \ \forall x \in S$;
2) $f(f(x,t),s) = f(x,t+s) \ \ \forall x \in S, \ \forall s,t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем полагать $f^t(x) = f(x,t)$, $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$.

Мы предполагаем поверхность S ориентируемой, т.е. она может быть, например, сферой, тором, кренделем; в общем, сферой с ручками (см. Рис. 1.1).

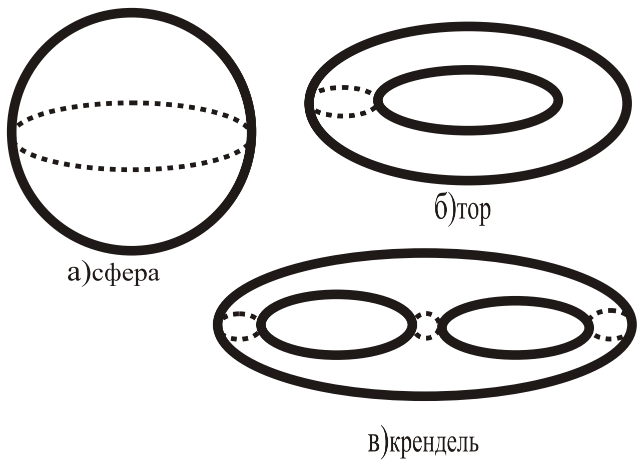

Рисунок **1.1**

Примеры поверхностей S

Для потока f^t точка x называется *блуждающей*, если существует окрытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \varnothing$ для всех $t > 1$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*.

Множество всех блуждающих (неблуждающих) точек потока f^t называется его *блуждающим множеством* (*неблуждающим множеством*).

[1] Студент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru
[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

Траекторией или *орбитой* точки $x \in S$ называется множество $O_x = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t.

Точка x называется *неподвижной точкой* или *состоянием равновесия*, если $O_x = \{x\}$.

Орбита O_x называется *периодической*, если существует $T > 0$ такое, что $f^T(x) = x$ и $f^t(x) \neq x$ для $t < T$. Периодическая орбита называется *предельным циклом*, если в ее окрестности нет других периодических траекторий (эквивалентным является утверждение, что всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени).

Пусть d – риманова метрика на S. Тогда *устойчивым* (*неустойчивым*) многообразием точки x называется множество $W^s_x = \{y \in S : d(f^t(x), f^t(y)) \to 0$ при $t \to +\infty\}$ ($W^u_x = \{y \in S : d(f^t(x), f^t(y)) \to 0$ при $t \to -\infty\}$).

Устойчивой (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки p называется компонента связности множества $W^s_p \backslash p$ ($W^u_p \backslash p$).

Два потока называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм, отображающий траектории одного потока в траектории другого с сохранением направления движения.

Поток f^t называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ элемента f^t в $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ такая, что если $f'^t \in U(f^t)$, то траектории f^t и f'^t топологически эквивалентны. В противном случае поток называется *структурно неустойчивым*.

Потоки на плоскости возникают, например, при решении систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \text{ где } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

В 1937 г. для систем типа (1.1) с конечным числом состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис в ограниченной части плоскости Е.А. Леонтович и А.Г. Майер [1] в качестве топологического инварианта предложили *схему*. В 1955 [2] году они доказали, что схема задаёт поток с точностью до топологической эквивалентности.

В 1971 году Пейшото [6] получил топологическую классификацию структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях с помощью комбинаторного инварианта – *ориентированного графа*, обобщающего схему Леонтович-Майера.

Простейшим примером структурно устойчивого потока на двумерной сфере служит поток, имеющий четыре неподвижные точки: источник α, седло σ и два стока ω_1 и ω_2 (см. Рис. 1.2). Ориентированный граф, соответствующий этому потоку также построен на рисунке 1.2.

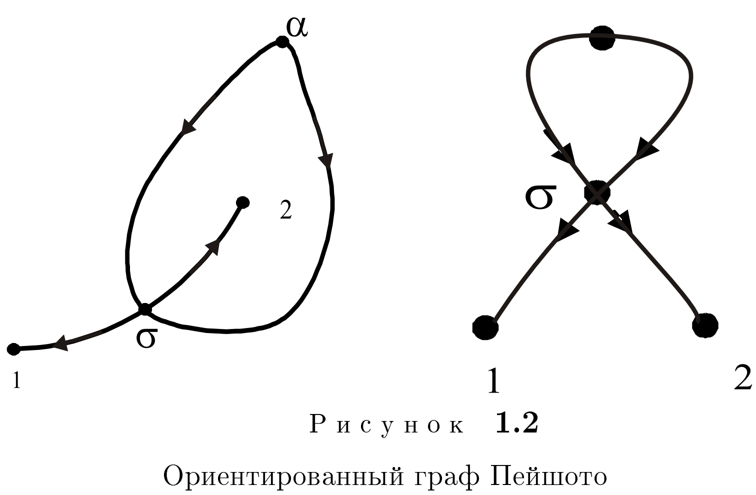

Рисунок **1.2**

Ориентированный граф Пейшото

В 1998 году А.А. Ошемков, В.В. Шарко [3] ввели новый инвариант для структурно устойчивых потоков, устраняющий некоторые недостатки ориентированного графа, как полного топологического инварианта, – *трёхцветный граф*. Трёхцветный граф для потока, чей фазовый портрет построен на Рисунке 1.2, выполнен на Рисунке 1.3.

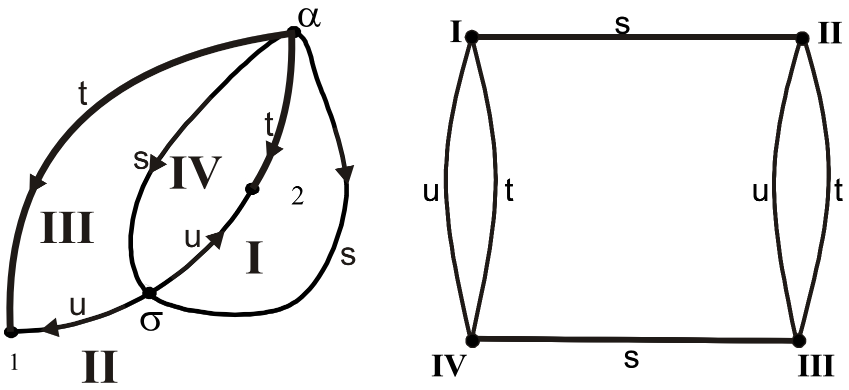

Рисунок **1.3**

Трехцветный граф Ошемкова-Шарко

В настоящей работе многоцветный граф строится для более широкого класса потока на поверхностях, включающего структурно устойчивые потоки. В связи с чем дадим необхоимые понятия.

Напомним, что *конечным графом* Γ называется упорядоченная пара (B, E), для которой выполнены следующие условия: B – непустое множество *вершин*; E – множество пар вершин, называемых *рёбрами*.

Если граф Γ содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a, b называют *инцидентной* ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e.

Ориентированный граф – конечный граф, каждое из рёбер которого является упорядоченной парой вершин.

Путём в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида $b_0, (b_0, b_1), b_1, ..., b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, ..., b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k$, $k \geqslant 1$. Число k называется *длиной пути*, оно равно числу входящих в путь рёбер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Циклом длины $k \in \mathbb{N}$ в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, ..., b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, ..., b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0), b_0\}$. *Простым циклом* называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.

Определение 1.1. *Граф Γ называется многоцветным графом, если множество рёбер графа является объединением подмножеств, каждое из которых состоит из рёбер одного и того же определённого цвета;*

Определение 1.2. *Два многоцветных графа называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение вершин и рёбер одного графа соответственно на вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности.*

В настоящей работе доказано, что для широкого класса потоков на поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности его многоцветного графа. Более детально.

2. Формулировка результатов

Обозначим через G класс потоков f^t, заданных на поверхности S и обладающих следующими свойствами:

1) неблуждающее множество Ω_{f^t} конечно и гиперболично;

2) если $W_p^s \cap W_q^u \neq \varnothing$ для различных седловых точек p, q, то $(W_p^u \setminus p) \cap W_r^s = \varnothing$ и $(W_q^s \setminus q) \cap W_r^u = \varnothing$ для любой седловой точки r.

Заметим, что класс G содержит все структурно устойчивые потоки на поверхностях, но допускает и негрубые потоки с траекториями, идущими из седла в седло. Однако, в силу конечности неблуждающего множества, у потоков в классе G отсутствуют циклы и, в частности, петли сепаратрис.

В качестве простейшего примера негрубого потока из класса G рассмотрим поток f^t, фазовый портерет которого изображён на Рисунке 2.1. Там же изображен его четырехцветный граф Γ_{f^t}. Опишем конструкцию построения многоцветного графа по потоку $f^t \in G$ в общем случае.

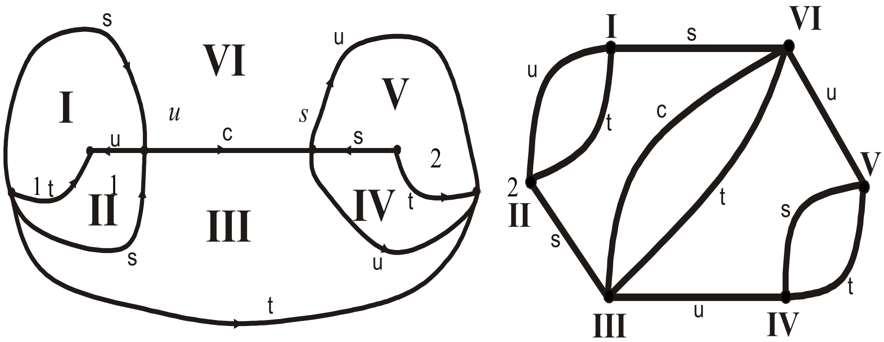

Рисунок **2.1**

Фазовый портрет негрубого потока из класса G и его многоцветный граф

Пусть $f^t : S \to S$ – поток из класса G.

Обозначим через $\Omega^0_{f^t}$ множество всех стоков потока f^t, $\Omega^1_{f^t}$ множество всех сёдел f^t, $\Omega^2_{f^t}$ множество всех источников f^t. Удалим из поверхности S замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек потока f^t и обозначим получившееся множество через $\widehat{S}$, т. е. $\widehat{S} = S \backslash (W^u_{\Omega^0_{f^t}} \cup W^u_{\Omega^1_{f^t}} \cup W^s_{\Omega^1_{f^t}} \cup W^s_{\Omega^2_{f^t}})$.

Лемма 2.1. *Множество $\widehat{S}$ представляется в виде объединения областей (ячеек), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет один из видов, изображённых на Рисунке 2.2 и содержит в точности один сток, один источик, одну, две, три или четыре седловые точки и некоторые из их сепаратрис.*

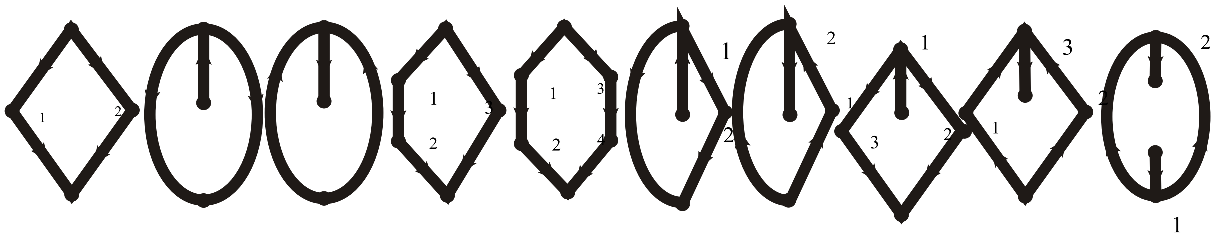

Рисунок **2.2**

Пусть A – любая ячейка из множества $\widehat{S}$, α и ω – источник и сток, входящие в её границу. Траекторию $\theta \in A$ потока f^t, граничными точками которой являются источник α и ω, будем называть t*-кривой*. Обозначим через Θ множество, состоящее из t-кривых, взятых по одной из каждой ячейки. Положим $\widehat{S}_{\Delta_{f^t}} = \widehat{S} \backslash \Theta$.

Любую компоненту связности $\widehat{S}_{\Delta_{f^t}}$ назовём *многоугольной областью*. Обозначим через Δ_{f^t} множество всех многоугольных областей потока f^t. В границу каждой из них входят 3 или 4 неподвижные точки: источник α, одно седло σ или два седла σ^u и σ^s, сток ω, устойчивая сепаратриса седла l_s (будем называть её s*-кривой*) с граничными точками α и σ либо σ^s, неустойчивая сепаратриса седла l_u (будем называть её u*-кривой*) с граничными точками ω и σ либо σ^u, t*-кривая* с граничными точками α и ω и, в случае двух сёдел, сепаратриса, соединяющая их (будем называть её c*-кривой*) с граничными точками σ^u и σ^s. Стороной многоугольной области будем называть замыкание s-, u-, t- или c-кривой. Будем говорить, что две области имеют *общую сторону*, если эта сторона принадлежит замыканиям обеих областей.

Простой цикл графа назовём *двухцветным* циклом типа tu, st, su, cu, sc или *трёхцветным* циклом типа scu, если он содержит рёбра в точности двух или трёх цветов соответственно.

Многоцветный граф Γ_{f^t}, соответствующий потоку $f^t \in G$, строится следующим образом:

1) вершины графа Γ_{f^t} взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества Δ_{f^t};

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u или c, если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s-, t-, u- или c-кривую.

Обозначим через B_{f^t} множество вершин графа Γ_{f^t}. Так как стороны любой многоугольной области раскрашены в разные цвета, то в вершине, соответствующей многоугольной области сходятся рёбра минимум трёх, максимум четырёх цветов графа. Поскольку каждая сторона многоугольной области примыкает ровно к двум различным многоугольным областям, то граф Γ_{f^t} не имеет циклов длины 1. Таким образом, граф Γ_{f^t} удовлетворяет определению многоцветного графа. В силу конструкции, многоцветные графы, полученные по различным разбиениям на многоугольные области (в зависимости от выбора t-кривых) изоморфны.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Потоки f^t и f'^t из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы Γ_{f^t} и $\Gamma_{f'^t}$ изоморфны.*

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А).

Список литературы

1. Леонтович Е. А., Майер А. Г., "О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории", *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.

2. Леонтович Е. А., Майер А. Г., "О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории", *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.

3. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.

4. Палис Ж., ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ.*, Мир, М., 1986, 301 с.

5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966, 568 с.

6. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil, 1971

Multicolored graph as a complete topological invariant for the flow with a finite number of singular trajectories on surfaces

© V. E. Kruglov[3], O. V. Pochinka[4]

Abstract. In this paper we consider the continuous dynamic systems on surfaces. For a meaningful class of flows with finitely many singular trajectories we introduce the concept of multi-color graph and proved that the class of topological equivalence of such a flow is completely determined by the isomorphism class of its multi-colored graph.

Key Words: multicolored graph, flow, topological equivalence

[3] Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod
[4] Professor of the Department fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod