УДК 517.938.5

О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями

© Е. Я. Гуревич[1], С. Х. Зинина[2]

Аннотация. В работе выделяется класс градиентно-подобных динамических систем на поверхностях, топологическая классификация которых сводится к классификации грубых систем на окружности, полученной А.Г. Майером.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологическая сопряженность, локально-тривиальное расслоение, локально прямое произведение.

1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно, состоит только из гиперболических периодических точек, и для любых различных седловых периодических точек $p, q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$ следует, что размерность множества W^u_p меньше размерности множества W^u_q. Для случая $n = 2$ это условие означает, что инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q различных седловых точек градиентно-подобного диффеоморфизма не пересекаются.

Поток $f^t : M^2 \to M^2$ называется градиентно-подобным, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, и инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесий не имеют общих точек. Из работы [5] следует, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ можно представить как суперпорпозицию сдвига на единицу времени вдоль траекторий некоторого градиентно-подобного потока f^t и периодического диффеоморизма на M^2.

Задача о топологической классификации динамических систем Морса-Смейла на поверхностях (и градиентно-подобных систем в частности) восходит к классическим работам А.А.Андронова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович и А.Г. Майера, где был получен полный топологический инвариант — схема динамической системы — для потоков на сфере S^2 с конечным числом особых траекторий (см. работы [1], [12]). Подход, разработанный в этих работах, был обобщен М. Пейшото, которому принадлежит результат по топологической классификации потоков Морса-Смейла на произвольных поверхностях ([17]). Однако, в его работе была допущена неточность, которую заметили А. А. Ошемков и В. В. Шарко. В их работе [16] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях (включая решение задачи реализации) на языке трехцветных графов. Еще один метод решения задачи о топологической классификации динамических систем состоит

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород; egurevich@hse.ru

[2] Магистрантка факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

в привлечении аппарата функции Ляпунова. К.Мейер получил полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях при помощи самоиндексирующейся энергетической функции (глобальной гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством состояний равновесия потока). Однако, при проведении доказательства в окрестности предельных циклов, использовал результат Пейшото, который, вообще говоря, был верен только для близких систем. Результат К.Мейера уточняется в работе [9].

В цикле работ [2]– [8] В.З. Гринесом и А.Н. Безденежных получена топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на поверхностях. В работе [11] идеи Ошемкова и Шарко были применены для топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерных многообразий.

В настоящей работе предлагается еще один подход к решению проблемы топологической классификации некоторого содержательного класса градиентно-подобных систем, позволяющий понизить размерность задач и свести проблему к топологической классификации систем на мнообразиях меньшей размерности.

Представим окружность $\mathbb{S}^1$ как подмножество комплексной плоскости: $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}|\ z = e^{ix}, x \in \mathbb{R}\}$, а тор $\mathbb{T}^2$ и бутылку Клейна $\mathbb{K}^2$ как фактор-пространство прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ по циклической группе диффеоморфизмов $\Gamma = \{\gamma^n, n \in \mathbb{Z}\}$ с образующей $\gamma(z,t) = (\tau(z), t-1), z \in \mathbb{S}^1, t \in \mathbb{R}$, где $\tau : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — тождественный диффеоморфизм в случае тора и инволюция $\tau(e^{ix}) = e^{-ix}$ в случае бутылки Клейна. Обозначим через $p_\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to M^2$ естественную проекцию.

Пусть $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$, и $\widetilde{\Phi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\widetilde{\Phi}(z,t) = (\varphi_1(z), \tilde{\varphi}_2(t))$, где диффеоморфизмы $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \tilde{\varphi}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_1\tau = \tau\varphi_1$;
2. либо $\tilde{\varphi}_2(t+1) = \tilde{\varphi}_2(t) + 1$, либо $\tilde{\varphi}_2(t+1) = \tilde{\varphi}_2(t) - 1$.

Непосредственно проверяется, что в случае, когда $\tilde{\varphi}_2(t+1) = \tilde{\varphi}_2(t) + 1$, имеет место соотношение $\widetilde{\Phi}\gamma\widetilde{\Phi}^{-1} = \gamma$; а в случае $\tilde{\varphi}_2(t+1) = \tilde{\varphi}_2(t) - 1$ имеет место соотношение $\widetilde{\Phi}\gamma\widetilde{\Phi}^{-1} = \gamma^{-1}$. Это позволяет корректно определить диффеоморфизм $\Phi : M^2 \to M^2$ формулой $\Phi = p_\tau\tilde{\Phi}p_\tau^{-1}$, где $p_\tau^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}|\ p_\tau(x) = y\}$ обозначает полный прообраз точки $y \in M^2$. Отметим, что накрытие $p_0 : \{z\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, определяемое формулой $p_0(t) = e^{2\pi ti}$, и диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_2$ однозначно определяют диффеоморфизм $\varphi_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ такой, что $\varphi_2 p_0 = p_0\tilde{\varphi}_2$. Диффеоморфизм Φ будем называть *локально прямым произведением диффеоморфизмов* φ_1, φ_2 и обозначать $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

В разделе 2.3. мы вводим класс $\mathbb{G}(M^2)$ модельных градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся локально прямыми произведениями двух структурно-устойчивых диффеоморфизмов на окружности.

Следующая теорема показывает, что класс топологической сопряженности произвольных модельных диффеоморфизмов $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$, заданных на одном и том же многообразии $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$, определяется классами сопряженности диффеоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$.

Т е о р е м а 1.1.

1. *Модельные диффеоморфизмы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ на торе топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо φ_1 топологически сопряжен с φ'_1 и*

φ_2 топологически сопряжен с φ'_2, либо φ_1 топологически сопряжен с φ'_2 и φ_2 топологически сопряжен с φ'_1.

2. *Модельные диффеоморфизмы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ на бутылке Клейна топологически сопряжены тогда и только тогда, когда φ_1 топологически сопряжен с φ'_1 и φ_2 топологически сопряжен с φ'_2.*

Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов на окружности была получена А.Г. Маейром в работе [13] (из этой работы также следует, что класс структурно устойчивых диффеоморфизмов на окружности совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла). Для связности изложения мы приводим его результаты в разделе 2..

Отметим, что теорема 1.1. не обобщается на случай произвольных диффеоморфизмов, являющихся локально прямыми произведениями. Так, из работы [15] Я. Нильсена, в частности, следует, что если $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ — два периодических отображения на торе с одинаковым периодом[3], то эти диффеоморфизмы топологически сопряжены даже в том случае, если соответствующие диффеоморфизмы окружности φ_i, φ'_i $(i = 1, 2)$ не являются топологически сопряженными (например, имеют разные периоды).

Пусть $G(M^2)$ — класс градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном замкнутом многообразии M^2 такой, что для любого $f \in G(M^2)$ множество седловых точек Ω^1_f представляется в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств Σ_1, Σ_2 таких, что:

1) множества $\mathcal{A}_f = cl\ W^u_{\Sigma_1}$, $\mathcal{R}_f = cl\ W^s_{\Sigma_2}$ состоят из конечного числа попарно непересекающихся компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности;

2) $(\Omega^0_f \cup \Omega^2_f) \subset \mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$;

3) для любых различных седловых точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, принадлежащих одной и той же компоненте связности аттрактора $\mathcal{A}_f$ (репеллера $\mathcal{R}_f$) выполняются условия $cl\ (W^s_{\sigma_1}) \cap cl\ (W^s_{\sigma_2}) = \emptyset$ $(cl\ (W^u_{\sigma_1}) \cap cl\ (W^u_{\sigma_2}) = \emptyset)$.

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $f \in G(M^2)$. Тогда M^2 диффеоморфно либо тору $\mathbb{T}^2$, либо бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$ и найдется модельный диффеоморфизм $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, топологически сопряженный с f.*

Неопосредственным следствием из теоремы 1.2. является аналогичный результат для потоков. Пусть $\mathcal{F}(M^2)$ — класс градиентно-подобных потоков f^t на поверхности M^2 таких, что для любого потока $f^t \in \mathcal{F}(M^2)$ выполняются условия 1,2 и 3. Аналогично определению модельных диффеоморфизмов, определим модельные потоки на торе и бутылке Клейна, являющиеся локально прямым произведением грубых потоков на окружности соответственно.

Т е о р е м а 1.3.

- *Пусть $f^t \in \mathcal{F}(M^2)$. Тогда $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$ и найдется модельный поток на M^2, топологически эквивалентный потоку f^t.*

[3] Отображение $f : M^2 \to M^2$ называется периодическим периода $m > 0$, если $f^m(x) = x$ для любой точки $x \in M^2$ и существует по крайней мере одна точка $y \in M^2$ такая, что множество $y, f(y), ..., f^{m-1}(y)$ состоит из попарно-различных точек.

- *Модельные потоки* $\Phi^t = (\varphi_1^t, \varphi_2^t), \Phi'^t = ({\varphi'_1}^t, {\varphi'_2}^t)$ *на торе топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда либо* ${\varphi_1}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_1}^t$ *и* ${\varphi_2}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_2}^t$, *либо* ${\varphi_1}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_2}^t$ *и* ${\varphi_2}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_1}^t$.
- *Модельные потоки* $\Phi^t = (\varphi_1^t, \varphi_2^t), \Phi'^t = ({\varphi'_1}^t, {\varphi'_2}^t)$ *на бутылке Клейна топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда* ${\varphi_1}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_1}^t$ *и* ${\varphi_2}^t$ *топологически эквивалентен* ${\varphi'_2}^t$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А и 15-31-50394 мол _ нр). Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за внимание к работе.

2. Модельные диффеоморфизмы, являющиеся локально прямыми произведениями на торе и бутылке Клейна

2.1. Топологическая классификация А.Г. Майера диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности

В этом разделе напоминаются результаты А.Г. Майера (см. [13]) по топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности. Обозначим этот класс через $MS(\mathbb{S}^1)$ и разобъем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

П р е д л о ж е н и е 2.1.

1. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS(\mathbb{S}^1)$ *неблуждающее множество* Ω_φ *состоит из четного числа периодических точек.*

2. Если $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, *то все периодические точки имеют одинаковый период, если* $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$, *то в точности две его неблужающие точки являются неподвижными, а остальные имеют период 2.*

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, $2n$ — число его периодических орбит, k — период. Зафиксируем произвольную периодическую точку p_0 и занумеруем остальные периодические точки в порядке их следования за точкой p_0 вдоль обхода окружности по часовой стрелке. Если $k > 1$, то обозначим через $l \in \{1, \dots, k-1\}$ такое целое число, взаимно простое с k, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$. Если $k = 1$, то положим $l = 0$ [4]. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0.

Пусть $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$, $2q$ — число его периодических точек.

П р е д л о ж е н и е 2.2.

[4] А.Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое он называл *порядковым числом*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$.

1. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ *с параметрами* $(n,k,l);(n',k',l')$ *соответсвенно топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $n=n', k=k'$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*
   - $l=l'$ (*при этом если* $l\neq 0$, *то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию*),
   - $l=k'-l'$ (*при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию*).
2. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ *с параметрами* $q;q'$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $q=q'$.

2.2. Модельные представители классов топологической сопряженности диффеоморфизмов из $MS(\mathbb{S}^1)$

Напомним, что во введении определены следующие объекты: $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}|\ z=e^{ix}, x\in\mathbb{R}\}$ и $p_0:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ — непрерывное отображение, заданное формулой $p_0(x)=e^{2\pi xi}$. Определим диффеоморфизм $\chi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ формулой $\chi(e^{ix})=e^{-ix}$.

Для $m\in\mathbb{N}$ обозначим через $\tilde\eta_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot x=\sin(2\pi mx)$. Для $k=1$ положим $l=0$, для $k>1$ пусть $l\in\{1,...,k-1\}$ — натуральное число, взаимно простое с k. Определим диффеоморфизмы $\tilde\theta_{k,l},\tilde\phi_{n,k,l}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ формулами $\tilde\theta_{k,l}(x)=x-\frac{l}{k}$, $\tilde\phi_{n,k,l}=\tilde\theta_{k,l}\tilde\eta_{n\cdot k}$. Так как для любых n,k,l диффеоморфизм $\tilde\phi_{n,k,l}$ удовлетворяет условию $\tilde\phi_{n,k,l}(x+1)=\tilde\phi_{n,k,l}(x)+1$, то формула $\phi_{n,k,l}(z)=\pi(\tilde\phi_{n,k,l}(\pi^{-1}(z)))$ корректно определяет сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\phi_{n,k,l}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, реализующий класс топологической сопряженности, определяемый тройкой (n,k,l).

Для определения меняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на окружности, реализующего класс топологической сопряженности, определяемый числом $q\in\mathbb{N}$, положим $\phi_q(z)=\phi_{q,1,0}(\chi(z))$ и отметим, что диффеоморфизм $\tilde\phi_q(x)=\tilde\phi_{q,1,0}(-x)$ является накрывающим для $\phi_q(z)$.

2.3. Определение модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

Напомним, что во введении тор $\mathbb{T}^2$ и бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$ определены как фактор-пространство прямого произведения $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ по циклической группе диффеоморфизмов $\Gamma=\{\gamma^n, n\in\mathbb{Z}\}$ с образующей $\gamma(z,t)=(\tau(z),t-1), z\in\mathbb{S}^1, t\in\mathbb{R}$, $\tau:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ — тождественный диффеоморфизм в случае тора и инволюция $\tau(e^{ix})=\chi(e^{ix})=e^{-ix}$ в случае бутылки Клейна, и через $p_\tau:\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\to M^2$ обозначена естественная проекция.

Выберем произвольную пару модельных диффеоморфизмов $\varphi_1,\varphi_2\in MS(\mathbb{S}^1)$ и определим модельный диффеоморфизм $\Phi\in\mathbb{G}(\mathbb{T}^2)$ как прямое произведение $\Phi=(\varphi_1,\varphi_2)$.

Определим модельный диффеоморфизм $\Phi\in\mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$, являющийся локально прямым произведением $\Phi=(\varphi_1,\varphi_2)$. В качестве диффеоморфизма φ_2 выберем произвольный модельный диффеоморфизм из множества $MS(\mathbb{S}^1)$, а в качестве диффеоморфизма φ_1 выберем либо диффеоморфизм ϕ_q (где $q\in\mathbb{N}$ — произвольное число), либо диффеоморфизм $\phi_{n,1,0}$, либо диффеоморфизм $\phi_{n,2,1}$ (где $n\in\mathbb{N}$ — произвольное число). Такой выбор диффеоморфизма φ_2 исчерпывает все модельные диффеомофизмы из множества $MS(\mathbb{S}^1)$, для которых выполняется условие $\varphi_2\chi=\chi\varphi_2$.

2.4. Топологическая классификация модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

В этом разделе доказывается теорема 1.1..

Необходимость. Пусть $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ — модельные диффеоморфизмы из класса $\mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$, $\tilde{\Phi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}' : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ — накрывающие диффеморфизмы из определения локально прямого произведения, и, для определенности, $\varphi_1 = \phi_q, \varphi_2 = \phi_{n,k,l}$, $\varphi'_1 = \phi_{q'}, \varphi'_2 = \phi_{n',k',l'}$ (рассуждения в остальных случаях аналогичны).

Положим $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{\mathbb{S}^1 \times \{\frac{\nu}{2nk}\}, \nu \in \mathbb{Z}\}$, $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{\{e^{i\pi\frac{\mu}{q}}\} \times \{\mathbb{R}\}, \mu \in \{0, ..., 2q-1\}\}$. Отметим, что $p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \tilde{\mathcal{B}}_2) = \bigcup\limits_{p,q \in \Omega^1_\Phi} (cl\ W^s_p \cup cl\ W^u_q)$, при этом множество $\mathcal{B}_1 = p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_1)$ состоит из $2nk$ двусторонних кривых, а множество $\mathcal{B}_2 = p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_2)$ является объединением двух односторонних кривых и $(q-1)$ односторонних кривых. Пусть $B_2 \in \mathcal{B}_2$ — односторонняя кривая. Выберем на B_2 ориентацию произвольным образом и занумеруем кривые $B_1^0, ..., B_1^{2nk-1}$ из множества $\mathcal{B}_1$ таким образом, чтобы при обходе кривой B_2 в выбранном направлении от точки $B_1^0 \cap B_2$ к точке $B_1^{2nk-1} \cap B_2$ последовательность номеров возрастала, пробегая все значения от 0 до $2nk-1$. Ограничение диффеоморфизма Φ на множество $\mathcal{B}_1$ индуцирует подстановку P_1 на множестве $\{0, 1, ..., 2nk-1\}$ периода k, причем либо $P_1(0) = 2nl$ либо $P_1(0) = 2n(k-l)$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}'_1, \tilde{\mathcal{B}}'_2$, $\tilde{\mathcal{B}}'_1, \tilde{\mathcal{B}}'_2$, P'_1 аналогичные объекты для диффеоморфизма Φ'.

Пусть Φ, Φ' топологически сопряжены, то есть существует гомеоморфизм $h : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ такой, что $h\Phi = \Phi' h$. Тогда $h(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$ и гомеоморфизм $h|_{\mathcal{B}_1}$ сопрягает подстановки P_1, P'_1. Тогда $q = q', n = n'$, $k = k'$ и либо $l = l'$, либо $l = k' - l'$, что, в силу утверждения 2.2., означает, что диффеоморфизмы φ_i, φ'_i топологически сопряжены, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi, \Phi' \in \mathbb{G}(\mathbb{T}^2)$. Аналогично первому случаю введем множества $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$, которые, в этом случае, состоят из конечного числа двусторонних кривых. Пусть существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ такой, что $h\Phi = \Phi' h$.

Возможны две ситуции: либо $h(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$, либо $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}'_2$, а $h(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}'_1$. В каждой ситуации рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Достаточность. Пусть $\Phi, \Phi' \in \mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$ и диффеоморфизм φ_i топологически сопряжен с диффеоморфизмом φ'_i посредством гомеоморфизма h_i, $i \in \{1, 2\}$. Тогда существует гомеоморфизм $\tilde{h}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $\tilde{h}_2 \chi = \chi \tilde{h}_2$ и $\tilde{h}_2 \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}'_2 \tilde{h}_2$. Отсюда следует, что диффеоморфизм $\widetilde{\Phi}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $\widetilde{\Phi}'$ посредством гомеоморфизма $\tilde{h} = (h_1, \tilde{h}_2)$ и диффеоморфизм Φ топологически сопряжен с диффеоморфизмом Φ' посредством гомеоморфизма $h = p_\tau \tilde{h} p_\tau^{-1}$. Рассуждения в случае тора аналогичны.

Доказательство закончено.

3. Топология многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса $G(M^2)$

В этом разделе в лемме 3.2. доказывается первая часть теоремы 1.2..

Лемма 3.1. *Пусть P_1, P_2 — топологические пространства такие, что существуют гомеоморфизмы $h_1 : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_1$ и $h_2 : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_2$. Тогда*

а) если $P_1 \cap P_2 = h_1(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$, то существует гомеоморфизм $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$;

b) если $P_1 \cap P_2 = h_1(\mathbb{S}^1 \times \{0,1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0,1\})$, то существует непрерывное отображение $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$ такое, что ограничения $H|_{\mathbb{S}^1 \times (0,1)}$, $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ и $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}}$ являются гомеоморфизмами.

Доказательство. В случае a) определим гомеоморфизм $h_{1,2} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ формулой $h_2^{-1}(h_1(q,1)) = (h_{1,2}(q), 0)$ для любой точки $q \in \mathbb{S}^1$ и гомеоморфизм $H_{1,2} : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ формулой $H_{1,2}(q,t) = (h_{1,2}(q), t)$. Положим $H_2 = h_2 H_{1,2} : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_2$. Тогда искомый гомеоморфизм $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$ определяется формулой

$$H(q,t) = \begin{cases} h_1(q, 2t), t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(q, 2t-1), t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

В случае b) не уменьшая общности можно считать, что $h_1(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. Тогда отображение H, построенное в пункте a) будет взаимно-однозначным на множестве $\mathbb{S}^1 \times [0,1)$ и $H(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = H(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$. По построению отображение H является непрерывным и его ограничения $H|_{\mathbb{S}^1 \times (0,1)}$, $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ и $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}}$ являются гомеоморфизмами. Доказательство закончено.

Лемма 3.2. *Пусть $f \in G(M^2)$, тогда M^2 диффеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна.*

Доказательство. Покажем, что для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ замыкание каждой компоненты связности V множества $V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f)$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Так как V — связно и принадлежит устойчивому многообразию аттрактора $\mathcal{A}_f$ (неустойчивому многообразию репеллера $\mathcal{R}_f$), то V содержит в своем замыкании ровно по одной связной компоненте A, R множеств $\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f$. Далее будем предполагать, что множества V, A, R инвариантны относительно диффеоморфизма f (в противном случае перейдем к подходящей степени диффеоморфизма f).

Обозначим через через U_A замкнутую окрестность множества A в V, для которой существует гомеоморфизм $h_A : U_A \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ такой, что $h_A|_A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Положим $S_A = h_A^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$ и обозначим через $U_R \subset V$, $h_R : U_R \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ и S_R аналогичные объекты для множества R.

Покажем, что существует натуральное число ν_*, такое что $S_A^* = f^{-\nu_*}(S_A) \subset U_R$. Действительно, для каждой точки $t \in S_A$ существует натуральное число $\nu(t)$ и окрестность $U_t \subset S_A$ такие, что что $f^{-\nu}(U_t) \subset U_R$ для всех $\nu \geq \nu(t)$. Совокупность $\{U_t\}_{t \in S_A}$ образует покрытие окружности S_A. В силу компактности S_A, можно выбрать конечное число точек $t_1, ..., t_m$ таких, что их окрестности $U_{t_1}, ...U_{t_m} \subset \{U_t\}_{t \in S_A}$ образуют конечное покрытие окружности S_A. В качестве ν_* выберем максимальное из чисел $\nu(t_1), ..., \nu(t_m)$.

Покажем, что R и S_R принадлежат различным компонентам связности множества $U_R \setminus S_A^*$. Предположим противное. Тогда S_A^* является границей некоторой области $D \subset U_R$ и найдется натуральное число $\nu_D \geq \nu^*$ такое, что $f^{\nu_D}(D \cup f^{-\nu_*}(U_A)) \subset U_A$. Окружность $S = f^{\nu_D}(S_A^*) = f^{\nu_D - \nu^*}(S_A)$ гомологична окружности A в V_A, так как $S \cup A$ является границей кольца $f^{\nu_D - \nu_*}(U_A) \subset U_A$. С другой стороны, S ограничивает диск $f^{\nu_D}(D) \subset U_A$, следовательно, S гомологична нулю в V_A. Полученное противоречие доказывает, что S_A^* делит R и S_R в U_R. Так как U_R по условию гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, то замыкание области в U_R, ограниченной замкнутыми кривыми R и S_A^* также гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Множество $f^{-\nu_*}(U_A)$ гомеоморфно множеству U_A, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. В силу леммы 3.1. замыкание множества V гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Пусть B — произвольная компонента связности множества $\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$. В силу леммы3.1. существует непрерывное отображение $E_f : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M^2 \setminus B$ такое, что отображения $E_f|_{\mathbb{S}^1\times(0,1)} : \mathbb{S}^1 \times (0,1) \to M^2 \setminus B$, $E_f|_{\mathbb{S}^1\times\{0\}} : \mathbb{S}^1 \times \{0\} \to B$, $E_f|_{\mathbb{S}^1\times\{1\}} : \mathbb{S}^1 \times \{1\} \to B$ являются гомеоморфизмами. Обозначим через $E_{f,0} : \mathbb{S}^1 \to B$ ($E_{f,1} : \mathbb{S}^1 \to B$) гомеоморфизм такой, что $E_f(z,0) = E_{f,0}(z)$ ($E_f(z,1) = E_{f,1}(z)$) для любого $z \in \mathbb{S}^1$. Положим $\tau = E^{-1}_{f,0}E_{f,1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Тогда по построению многообразие M^2 диффеоморфно фактор-пространству прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times [0,1]/_\sim$ по отношению эквивалентности $(z,1) \sim (\tau(z),0)$, которое, в свою очередь, диффеоморфно либо тору $\mathbb{T}^2$ (в случае, когда τ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом), либо бутылкой Клейна (если τ является меняющим ориентацию гомеоморфизмом).
Доказательство закончено.

4. Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

4.1. Оснащенный граф диффеомофизма

Для доказательства теоремы используется результат работы [8], из которого следует, что два градиентно-подобных диффеоморфизма на поверхноти топологически сопряжены тогда и только тогда, когда изоморфны их различающие графы, аналогичные графу Пейшото. Ниже даются необходимые определения и приводится точная формулировка результата.

Пусть $f : M^2 \to M^2$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Поставим ему в соответствие ориентированный граф Γ_f, множество вершин которого изоморфно множеству периодических точек Ω_f, множество ребер изоморфно множеству всех сепаратрис седловых периодических точек, и каждое ребро ориентировано в соответствии с ориентацией сепаратрисы (от источника к седлу или от седла к стоку). Обозначим через η_f изоморфизм из множества периодических точек и сепаратрис диффеоморфизма f на множество на множество вершин и ребер графа Γ_f.

Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин графа Γ_f подстановку, которую обозначим через P_f.

Пусть L_ω — множество сепаратрис, содержащих в своем замыкании стоковую периодическую точку $\omega \in \Omega_f$ и n_ω — мощность множества L_ω. Выберем диск $d_\omega \subset W^s_\omega$, такой, что $\omega \subset int\ d_\omega$, а граница c_ω диска d_ω пересекает каждую сепаратрису из множества L_ω в единственной точке. Занумеруем сепаратрисы $l_{\omega,1},...,l_{\omega,n_\omega}$ из множества L_ω таким образом, чтобы при обходе дуги c_ω от точки $l_{\omega,1}\cap c_\omega$ к точке $l_{\omega,n_\omega}\cap c_\omega$ номера сепаратрис возрастали, последовательно принимая все значения от 1 до n_ω, а диск d_ω оставался слева.

Занумеруем множество ребер $E_\omega = \eta_f(L_\omega)$, инцидентных вершине $\eta_f\omega$ в соответствии с выбранной нумерацией соответствующих сепаратрис.

Граф Γ_f, в котором каждая вершина $\eta_f(\omega), \omega \in \Omega^0_f$, оснащена нумерацией инцидентных ей ребер, согласованной с нумерацией сепаратрис, называется *оснащенным графом диффеоморфизма* f.

Оснащенные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов f, f' *изоморфны*, если существует изоморфизм $\xi : \Gamma_f \to \Gamma_{f'}$ такой, что:

1. ξ сохраняет ориентацию ребер;

2. $\xi P_f = P'_f \xi$;

3. для каждой вершины w, соответсвующей стоковой точке, подстановка, которую индуцирует изоморфизм ξ на множестве $\{1, ..., N_\omega\}$, является степенью циклической подстановки.

В силу [8] (см. также [10], теорема 3.2.1) справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Градиентно-подобные диффеоморфизмы $f, f' : M^2 \to M^2$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащенные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны.*

4.2. Доказательство теоремы 1.2.

В силу утверждения 4.1. для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого диффеоморфизма $f \in \mathbb{G}(M^2)$ найдется модельный диффеоморфизм $\Phi : M^2 \to M^2$, оснащенный граф Γ_Φ которого изоморфен графу Γ_f.

Отметим, что модельные диффеомофизмы реализуют всевозможные классы (относительно изоморфизма, определенного выше) оснащенных графов и подстановок на их множестве вершин, обладающих следующими свойствами:

1. граф связен; не имеет кратных ребер и циклов (с учетом ориентации);

2. каждая вершина инцидентна ровно четырем ребрам;

3. множество вершин разбивается на три инвариантных относительно подстановки подмножества: стоковые (для каждой стоковой вершины w все индидентные ей ребра ориентированы к ω), источниковые (для каждой источниковой вершины a все инцидентные ей ребра ориентированы от a) и седловые (для каждой седловой вершины s ровно два ребра ориентированы к s и два — от s);

4. число стоковых вершин равно числу источниковых вершин;

5. число седловых вершин равно сумме чисел стоковых и источниковых вершин.

Для произвольного диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ оснащенный граф Γ_f и подстановка P_f обладают свойствами 1-5. Действительно, свойства 1, 3 и 5 следуют из определения графа Γ_f и формулы Лефшеца. Из условий 1-2, определяющих класс $G(M^2)$, следует, что число стоковых $|\Omega^0_f|$ и число седловых точек $|\Sigma_1|$, принадлежащих множеству $\mathcal{A}_f$, одинаково. Аналогично, равны число $|\Omega^2_f|$ источниковых и число $|\Sigma_2|$ седловых точек, принадлежащих множеству $\mathcal{R}_f$. Из условия 3 определения класса $G(M^2)$ следует, что $|\Sigma_1| \leq |\Omega^2_f|$, $|\Sigma_2| \leq |\Omega^0_f|$. Но из формулы Лефшеца следует, что $|\Sigma_1| + |\Sigma_2| = |\Omega^2_f| + |\Omega^0_f|$, тогда выполняются равенства $|\Sigma_1| = |\Omega^2_f|$, $|\Sigma_2| = |\Omega^0_f|$, откуда следует, что графа Γ_f удовлетворяет условиям 2,4.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247-250.

2. Безденежных А. Н. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Лентович-Андроновой, Горький, 1985. - С. 22 - 38. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 11. - P. 1 - 11.]

3. Безденежных А. Н. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Лентович-Андроновой, Горький, 1985. - С. 139 - 152.

4. Безденежных А. Н. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой, Горький, 1987. - С. 24-32. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds II. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 11. - P. 13 - 17.]

5. Безденежных А. Н. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ., 1985. - С. 33 - 37. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Realization of gradientlike diffeomorphisms of two-dimensional manifolds. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 1. № 1. - P. 19 - 23.]

6. Безденежных А. Н. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ., 1985. - С. 111 - 112.

7. Безденежных А. Н., Гринес В. З., "Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях", *Дифференциальные и интегральные уравнения / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ*, 1985, 33—37.

8. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на поверхностях/ В. З. Гринес// Мат. заметки, 1993.- Т. 54, № 3.- С. 3-17.

9. Гуревич Е. Я., Куренков Е. Д., "Энергетическая функция и топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях", *Труды СВМО*, 2015..

10. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

11. Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В., "Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей", *Математический сборник*, **10**, 205 (2014), 19-46.

12. Леонтович Е., Майер А. О, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557-560.

13. Майер А.Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.

14. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

15. Нильсен Я., *Структура периодических преобразований поверхностей (перевод с немецкого языка книги Nielsen J. Die struktur Periodischer Transformationen von Flachen. - Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. M.-f. Meddelelser. XV, 1, Kobenhavn, 1937, s. 1-77)*, Горький, 1984, 77 с.

16. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

17. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product

© E.Ya. Gurevich[5], S. H. Kapkaeva[6]

Abstract. We introduce a class of gradient-like dynamical systems for which the problem of topological classification is reduced to topological classification of structurally stable systems on the circle obtained by A. Mayer.

Key Words: Morse-Smale gradient-like diffeomorphism topological conjugacy, mapping torus, locally direct product.

[5] Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics; egurevich@hse.ru

[6] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.