УДК 517.9

Топологическая классификация полупрямых произведений DA-диффеоморфизма тора и грубого преобразования окружности

© **В. З. Гринес**[1], **Ю. А. Левченко**[2], **О. В. Починка**[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов являющихся полупрямым произведением DA-диффеоморфизма тора и грубого преобразования окружности. Доказывается, что класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется комбинаторными инвариантами, а именно гиперболическим автоморфизмом тора и некоторым подмножеством его периодических орбит, а также числом периодических орбит и порядковым числом преобразования окружности

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, DA-диффеоморфизм, гиперболических автоморфизм

1. Введение

Существенную роль в понимании принципиального отличия структурно устойчивых каскадов на многообразиях размерности большей единицы от структурно устойчивых потоков на поверхностях сыграл важный класс структурно устойчивых потоков и диффеоморфизмов, введенных Д.А. Аносовым в [1], [2] названных им *У-системами* и получивших позднее название *потоков и диффеоморфизмов Аносова*. Диффеоморфизм Аносова f замкнутого n-многообразия M^n характеризуется тем, что касательное пространство TM^n можно представить в виде суммы Уитни $E^s \oplus E^u$ df-инвариантных подрасслоений E^s, E^u ($\dim E^s_x + \dim E^u_x = n$, $x \in M^n$), и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^m(v)\| \leq C_s \lambda^m \|v\| \quad \text{для } v \in E^s, \qquad \|df^{-m}(v)\| \leq C_u \lambda^m \|v\| \quad \text{для } v \in E^u, \qquad m > 0.$$

С. Смейл обобщил понятие У-диффеоморфизма и ввел в рассмотрение класс систем с гиперболической структурой неблуждающего множества, являющегося замыканием множества периодических точек [11] (диффеоморфизмы, обладающие этими свойствами, получили название A*-диффеоморфизмов*). Неблуждающее множество систем из этого класса допускает разложение, называемое *спектральным*, на конечное число замкнутых инвариантных *базисных множеств*, на каждом из которых система действует транзитивно. Динамика на нетривиальном базисном множестве (не являющемся периодической орбитой) обладает свойствами, во многом сходными с поведением диффеоморфизма в примере “Аносовского тора”.

Гиперболическая структура на базисном множестве Λ некоторого А-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, порождает существование так называемых *устойчивых* и *неустойчивых* многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [6], [10]. Для любой точки

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

[2] Научный сотрудник ННГУ им. Н.И. Лобачевского; ulev4enko@gmail.com

[3] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; olga-pochinka@yandex.ru

$x \in \Lambda$ существует инъективная имерсия $J_x^s : \mathbb{R}^s \to M$, образ которой $W^s(x) = J_x^s(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки* x, такая, что выполняются следующие свойства:

1. $T_x W^s(x) = E^s_\Lambda$.
2. Точки $x, y \in M^n$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ при $n \to \infty$.
3. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$.
4. Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$.
5. Если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M^n, то $W^s(x)$, $W^s(y)$ C^1-близки на компактных множествах.

Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 4.2), устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями.*

В силу [8] базисное множество является *аттрактором (репеллером)* тогда и только тогда, когда оно содержит неустойчивые (устойчивые) многообразия своих точек. Однако размерность базисного множества, вообще говоря, может не совпадать с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то аттрактор (репеллер) называется *растягивающимся (сжимающимся).*

Диффеоморфизмы Аносова являются основой для построения растягивающихся аттракторов (сжимающихся репеллеров). Следуя [11], можно построить структурно устойчивый диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, неблуждающее множество которого состоит из неподвижного источника и одномерного растягивающегося аттрактора с помощью так называемой хирургической операции Смейла из диффеоморфизма Аносова, заданного на $\mathbb{T}^2$ (см. раздел 3.). Такой диффеоморфизм называется *DA*-диффеоморфизмом.

В настоящей работе мы моделируем класс структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, каждый из которых являеться локально прямым произведением некоторого DA-диффеоморфизма двумерного тора и грубого преобразования окружности. Затем мы находим полную систему топологических инвариантов для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

2. Гиперболические автоморфизмы двумерного тора

Классическим примером У-диффеоморфизма является *гиперболический автоморфизм тора* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, то есть диффеоморфизм $\widehat{C}$, заданный формулой $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ (mod\ 1)$, где $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1, собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$.

Обозначим через $\mathcal{C}$ множество гиперболических матриц из $GL(2, \mathbb{Z})$. Для $C \in \mathcal{C}$ обозначим через $Z(\widehat{C})$ централизатор $\widehat{C}$, то есть $Z(\widehat{C}) = \{\widehat{J} : J \in GL(2, \mathbb{Z}), \widehat{C}\widehat{J} = \widehat{J}\widehat{C}\}$.

Следующий результат доказан в [5].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Группа* $Z(\widehat{C}), C \in \mathcal{C}$ *изоморфна группе* $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Положим $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{J} = \mathcal{C} \cup Id \cup (-Id)$. Так как $\widehat{C}$ и $-\widehat{C}$ принадлежат $Z(\widehat{C})$, то следствием утверждения 2.1. является следующий факт (см., например, [3]).

Следствие 2.1. *Если $\widehat{J} \in Z(\widehat{C})$ для $C \in \mathcal{C}$, то $J \in \mathcal{J}$. Более того, C и J имеют одинаковую форму в следующем смысле: $C = (-Id)^{j_C}\xi^{k_C}$ и $J = (-Id)^{j_J}\xi^{k_J}$, где $\xi \in \mathcal{C}$, $k_C, k_J \in \mathbb{Z}$, $j_C, j_J \in \{0,1\}$.*

Гиперболический автоморфизм назовем *примарным*, если он не является степенью никакого другого гиперболического диффеоморфизма. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество сохраняющих ориентацию примарных автоморфизмов двумерного тора.

3. Конструкция DA-диффеоморфизмов

Приведем конструкцию DA-диффеоморфизма.

Пусть $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – гиперболический автоморфизм тора и p_0 – неподвижная седловая точка, соответствующая началу координат в $\mathbb{R}^2$ с собственными значениями λ^u и λ^s. В некоторой окрестности U точки p_0 введем локальные координаты x_1, x_2, в которых матрица линейного отображения L диагональная, то есть $\widehat{C}(x_1, x_2) = (\lambda^u x_1, \lambda^s x_2)$ на U. Выберем значение $r_0 \in (0, \frac{1}{2})$ так, чтобы 2-шар $B_{r_0}(p_0)$ радиуса r_0 с центром в точке p_0 содержался в U. Пусть $\delta(r)$ – функция одной переменной такая, что $0 \leq \delta(r) \leq 1$ для всех r, $\delta'(r) < 0$ для $r_0/2 < r < r_0$ и $\delta(r) = \begin{cases} 0, & r \geq r_0, \\ 1, & r \leq r_0/2. \end{cases}$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_2\delta(\| x \|)$. Пусть φ^t – поток этой системы, $\varphi^t(x_1, x_2) = (x_1, \varphi_2^t(x_1, x_2))$. Тогда $\varphi^t = id$ вне шара $B_{r_0}(p_0)$ и $D\varphi_p^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$. Положим $f_{\widehat{C},p_0} = \varphi^\tau \widehat{C}$ для некоторого $\tau > 0$ такого, что $e^\tau \lambda^s > 1$. Заметим, что $Df_{p_0} = \begin{pmatrix} \lambda^u & 0 \\ 0 & e^\tau \lambda^s \end{pmatrix}$, так что p_0 – гиперболический источник. По построению диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма Аносова, и координатные оси $f_{\widehat{C},p_0}$-инвариантны. Поскольку диффеоморфизмы φ^τ и $\widehat{C}$ имеют противоположные направления движения на оси Ox_2, то диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ имеет две симметричные относительно p_0 неподвижные точки q_1, q_2 на оси Ox_2, которые являются гиперболическими седловыми точками (см. рис. 3.1). Имеет место следующее утверждение (см. например [9]).

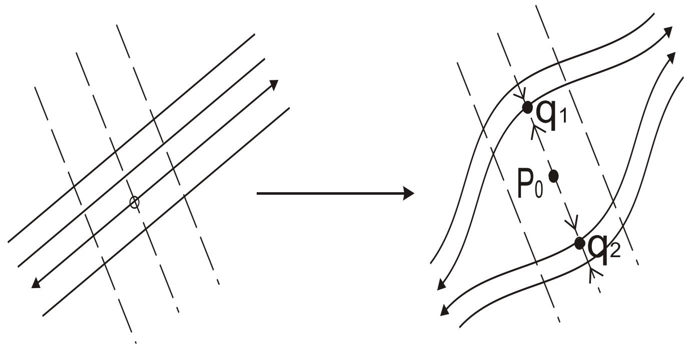

Рисунок **3.1**

Хирургическая операция Смейла.

Предложение 3.1. *Для диффеоморфизма $f_{\widehat{C},p_0}$ множество $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W^u_{p_0}$ является одномерным аттрактором и спектральное разложение имеет вид $\{p_0, \Lambda\}$.*

Построенный таким образом одномерный аттрактор Λ является растягивающимся, а про диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ говорят, что он получен из гиперболического автоморфизма $\widehat{C}$ *раздутием* неподвижной точки p_0. Описанная хирургическая операция очевидным образом обобщается на любое множество P периодических орбит диффеоморфизма $\widehat{C}$ и мы будем обозначать через $f_{\widehat{C},P}$ диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, полученный из гиперболического автоморфизма $\widehat{C}$ раздутием периодических орбит множества P.

Обозначим через $\mathcal{D}$ класс построенных DA-диффеоморфизмов $f_{\widehat{C},P}$.

4. Грубые преобразования окружности

Пусть $MS_+(\mathbb{S}^1)$ – класс сохраняющих ориентацию структурно устойчивых преобразований окружности, который совпадает, согласно результатам Майера [7], с классом сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на $\mathbb{S}^1$. Сформулируем результаты Майера по топологической классификации преобразований из множества $MS_+(\mathbb{S}^1)$.

Предложение 4.1. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k.*

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$ и числа (k, l) являются взаимнопростыми Непосредственно проверяется, что l не зависит от выбора точки p_0. Отметим, что А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *порядковым чилом*, таким что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$.

Предложение 4.2. *Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:*

- $l = l'$ *(при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),*
- $l = k' - l'$ *(при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).*

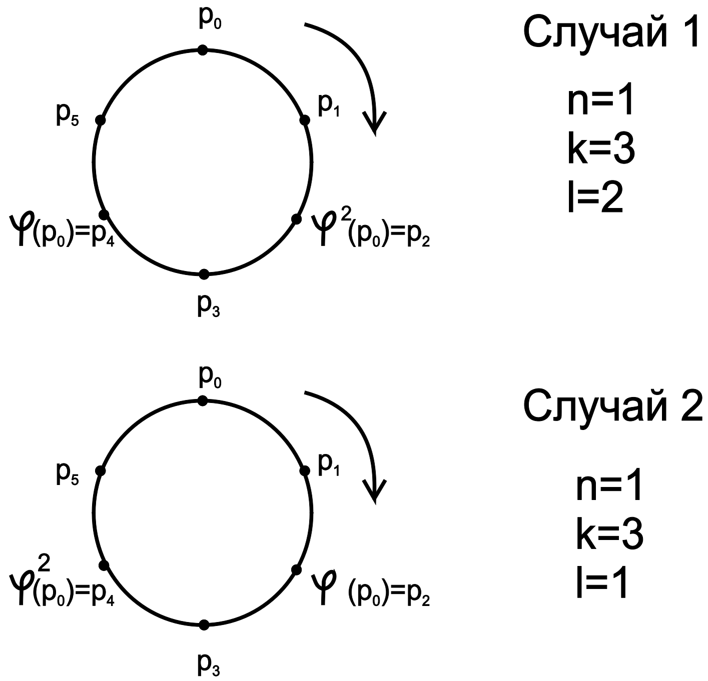

Рисунок **4.1**

Топологически сопряженные диффеоморфизмы окружности с различными порядковыми числами.

На рисунке 4.1 изображены фазовые портреты топологически сопряженных диффеоморфизмов окружности с различными порядковыми числами.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, построим стандартного представителя φ_+ in $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- в $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметром q.

Представим $\mathbb{S}^1$ как $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (cos 2\pi r, sin 2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введем следующие отображения:
$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\tilde{\varphi} = \psi_{n \cdot k} \chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}(r + w) = \tilde{\varphi}(r) + w$ для $w \in \mathbb{Z}$. Следовательно следующий диффеоморфизм корректно определен: $\varphi = \pi \tilde{\varphi} \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, где $\pi^{-1}(s)$ – полный прообраз точки $s \in \mathbb{S}^1$.

5. Формулировка результатов

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, $f_{\xi,P} \in \mathcal{D}$ для $\xi \in \mathcal{E}$, $\mu \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{Z}$. Положим $C = f^{\mu}_{\xi,P}$ и $J = f^{\nu}_{\xi,P}$. Обозначим через $\tilde{\phi} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ произведение диффеоморфизма $\tilde{\varphi}$ и диффеоморфизма C, то есть $\tilde{\phi}(z, r) = (C(z), \tilde{\varphi}(r))$.

Положим $M_J = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. Обозначим через $p_{_J} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_J$ естественную проекцию.

Непосредственно проверяется, что $\tilde{\phi}_\sigma \gamma = \gamma \tilde{\phi}_\sigma$ и, следовательно корректно определено отображение $\phi_\sigma = p_{_J} \tilde{\phi}_\sigma p_{_J}^{-1}$. Будем называть диффеоморфизм $\phi : M_J \to M_J$ локально прямым произведением отображений C и φ и писать $\phi_\sigma = C \otimes \varphi$. Обозначим через Φ

множество всех локально прямых произведений ϕ. Тогда каждый диффеоморфизм $\phi \in \Phi$ единственным образом определяется параметрами $\{\xi, P, \mu, \nu, , n, k, l\}$.

Следующий результат является алгебраическим критерием топологической сопряженности диффеоморфизмов из Φ.

Теорема 5.1. *Два диффеоморфизма $\phi; \phi' \in \Phi$ с параметрами $\{\xi, P, \mu, \nu, n, k, l\}; \{\xi', P', \mu', \nu', n', k', l'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\nu = \nu'$, $\mu = \mu'$, $n = n', k = k'$, и существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая что $\xi H = H\xi'$, $\widehat{H}(P) = P'$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

- $l = l'$,
- $l = k' - l'$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-03687-а, № 13-01-12452 офи_м2 и РНФ № 14-41-00044 в рамках в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

Список литературы

1. Аносов Д. В., “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707—709.

2. Аносов Д. В., “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН СССР, 90, 1967*, **90** (1962), 3-210.

3. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., “On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:4 (2014), 506–512.

4. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск., М., 2011, 424 с.

5. Плыкин Р. В., “О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора”, *УМН*, **53**:6 (1998), 259–260.

6. Hirsch M., Pugh C., Shub M., *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Lect. Nots Math., 1977, 576 pp.

7. Майер А. Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Ученые записки Горък. госуниверситета.*, 1939, № 12, 215–229.

8. Плыкин Р. В., “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, 1974, № 94, 243–264.

9. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press., 1999, 506 pp.

10. Smale S., “Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms”, *Ann. Scuola Norm. Pisa.*, **18** (1963), 97–116.

11. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:1 (1967), 741–817.

The topological classification of locally direct product of DA-diffeomorphism of a 2-torus and rough diffeomorphism of the circle

© V. Z. Grines[4], Yu. A. Levchenko[5], O. V. Pochinka[6]

Abstract. In this paper we consider a class of diffeomorphisms of 3-manifold, such that each diffeomorphism fron this class is a locally direct product of a DA-diffeomorphism of 2-torus and rough diffeomorphism of the circle. We find algebraic criteria for topological conjugacy of the systems. It is proved that the class of topological conjugacy of such diffeomorphism is completely determined by combinatorial invariants, namely hyperbolic automorphism of the torus, a subset of its periodic orbits, the number of periodic orbits and the serial number of the diffeomorphism of the circle

Key Words: topological conjugacy, DA-diffeomorphism, hyperbolic automorphism

[4] Professor of Department of Numerical and Functional Analysis in Nizhny Novgorod State University; vgrines@yandex.ru

[5] Researcher, Nizhny Novgorod State University; ulev4enko@gmail.com

[6] Professor of Department of fundamental mathematics of Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru