УДК 517.9

Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале

© О. В. Гермидер[1], В. Н. Попов[2], А. А. Юшканов[3]

Аннотация. В рамках кинетического подхода решена задача о течении разреженного газа в цилиндрическом канале при наличии продольного градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано кинетическое уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенке канала – модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного полагается малым. Это позволило рассмотреть решение задачи в линеаризованном виде. Для отыскания линейной поправки к локально-равновесной функции распределения задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Решение последнего построено с использованием метода характеристик. С учетом полученного решения, исходя из статистического смысла функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, построен профиль вектора потока тепла в канале и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен численный анализ окончательных выражений. Проведенное сравнение с аналогичными результатами, полученными с использованием метода дискретных ординат, показало, что предложенная в работе процедура решения приводит к корректным результатам в широком диапазоне значений радиуса канала

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, метод характеристик, течение газа в цилиндрическом канале

1. Введение

Исследование внутренних течений представляет собой одну из наиболее важных задач динамики разреженного газа [1]. Для слаборазреженных газов строгое решение этой задачи получается в результате интегрирования кинетического уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул разной природы) при соответствующих граничных и начальных условиях, после чего с помощью квадратур определяют макропараметры газа [2]. Однако, учитывая сложность кинетического уравнения Больцмана, решение задачи для слаборазреженных газов в общем случае может быть получено с использованием численных методов [1]–[3]. В сильно разреженных газах столкновениями молекул между собой можно пренебречь. В этом случае кинетическое уравнение Больцмана переходит в однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными, решение которого может быть получено аналитически [3]. До недавнего времени исследование внутренних течений ограничивалось в основном процессами переноса в каналах, стенки которых образованы бесконечными параллельными плоскостями, что подтверждается большим числом работ на эту тему, список которых можно найти в [1]–[5]. Однако в последнее время в связи с развитием микро и наноразмерных технологий все большее внимания уделяется рассмотрению течений газа в каналах произвольного поперечного сечения. Так, например, в [6] и [7] рассматривалось течение разреженного

[1] Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; o.germider@narfu.ru.

[2] Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@narfu.ru.

[3] Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

газа соответственно в канале прямоугольного и треугольного сечений, в [8]–[10] – в канале цилиндрического сечения, в [11] – в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами, в [12] – в канале эллиптического сечения. Цель представленной работы состоит в применении аналитических методов, разработанных в [13], для решения задачи о течении разреженного газа в канале цилиндрического сечения при наличии продольного градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано линеаризованное уравнение Вильямса [14], а в качестве граничного условия – модель диффузного отражения.

2. Вывод основных уравнений

Рассмотрим задачу о переносе тепла в цилиндрическом канале, радиуса R'. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры dT/dz' (ось Oz' направлена вдоль оси цилиндра). Для нахождения функции распределения молекул газа по координатам и скоростям воспользуемся уравнением Вильямса [14], которое в цилиндрической системе координат записывается в виде [3]

$$v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + \frac{v_\varphi}{\rho'}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{v_\varphi^2}{\rho'}\frac{\partial f}{\partial v_\rho} - \frac{v_\rho v_\varphi}{\rho'}\frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \tag{2.1}$$

Здесь $f = f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$; $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15/8$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2}{2k_B T_*}\right).$$

Параметры n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$ выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (2.1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. Будем считать, относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае задача допускает линеаризацию и решение уравнения (2.1) в объеме газа можно записать в виде [14]

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)\left[1 + 2C_z U_0 + G_T\left[\left(z - \frac{C_z}{C}\right)\left(C^2 - \frac{5}{2}\right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}C_z\right]\right]. \tag{2.2}$$

Здесь $f(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}\exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T_0$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, n_0 и T_0 – концентрация молекул газа и его температура в некоторой точке, принятой за начало координат, $z = z'/\gamma l_g$, G_T – безразмерный градиент температуры. Функция $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, определяемая выражением (2.2), является решением уравнения (2.1), однако она не удовлетворяет граничным условиям на стенках канала. Для того чтобы это условие выполнялось, поступим следующим образом. Образуем на множестве функций, зависящих модуля молекулярной скорости, скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_0^{+\infty} \rho(C) f(C) g(C)\, dC, \qquad \rho(C) = C^5 \exp(-C^2).$$

Выберем две ортогональные функции: $e_1(C)=1$ и $e_2(C)=C-5/2C$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю введенного выше скалярного произведения) и будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v})=f_\infty(\mathbf{r}',\mathbf{v})\left[1+G_T C_z\left[Z_1(\rho,c_\perp,\psi)+\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z_2(\rho,c_\perp,\psi)\right]\right]. \tag{2.3}$$

Здесь $\rho=\rho'/\gamma l_g$, $c_\perp^2=c_\rho^2+c_\varphi^2$, $c_\rho=C_\rho/C=c_\perp\cos\psi$, $c_\varphi=C_\varphi/C=c_\perp\sin\psi$, $c_\perp=C_z/C=\sin\theta$. При записи (2.3) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей, обозначив через ψ и θ соответственно углы, отсчитываемые от положительных направлений осей C_ρ и C_z. Подставляя (2.3) в (2.1) и линеаризовав функцию $f_*=f_*(n_*,T_*,\mathbf{u}_*)$ относительно абсолютного максвеллиана, как это приведено в [14], приходим к уравнению

$$C_z\left[C_\rho\frac{\partial Z_1}{\partial\rho}+\frac{C_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial C_\rho}-\frac{C_\rho C_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial C_\varphi}+CZ_1(\rho,c_\perp,\psi)\right]+ \tag{2.4}$$

$$+C_z\left(C-\frac{5}{2C}\right)\left(C_\rho\frac{\partial Z_2}{\partial\rho}+\frac{C_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial C_\rho}-\frac{C_\rho C_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial C_\varphi}+CZ_2(\rho,c_\perp,\psi)\right)=$$

$$=\frac{C}{2\pi}\int C'C_z'\exp(-C'^2)k(\mathbf{C},\mathbf{C}')\left[Z_1(\rho,c_\perp',\psi')+\left(C'-\frac{5}{2C'}\right)Z_2(\rho,c_\perp',\psi')\right]d^3\mathbf{C}',$$

$$k(\mathbf{C},\mathbf{C}')=1+\frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}'+\frac{1}{2}(C^2-2)(C'^2-2).$$

Вычисляя интегралы, входящие в правую часть (2.3), и сокращая обе части полученного равенства на CC_z, уравнение (2.3) записываем в виде

$$c_\rho\frac{\partial Z_1}{\partial\rho}+\frac{c_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\rho}-\frac{c_\rho c_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\varphi}+Z_1(\rho,c_\perp,\psi)+ \tag{2.5}$$

$$+\left(C-\frac{5}{2C}\right)\left(c_\rho\frac{\partial Z_2}{\partial\rho}+\frac{c_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial c_\rho}-\frac{c_\rho c_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial c_\varphi}+Z_2(\rho,c_\perp,\psi)\right)=$$

$$=\frac{3}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}Z_1(\rho,c_\perp',\psi')\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Учитывая ортогональность в смысле введенного скалярного произведения функций $e_1(C)=1$ и $e_2(C)=C-5/2C$, уравнение (2.5) распадается на два незацепленных уравнения

$$c_\rho\frac{\partial Z_1}{\partial\rho}+\frac{c_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\rho}-\frac{c_\rho c_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\varphi}+Z_1(\rho,c_\perp,\psi)=\frac{3}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}Z_1(\rho,c_\perp',\psi')\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\psi, \tag{2.6}$$

$$c_\rho\frac{\partial Z_2}{\partial\rho}+\frac{c_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial c_\rho}-\frac{c_\rho c_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial c_\varphi}+Z_2(\rho,c_\perp,\psi)=0. \tag{2.7}$$

Заметим, что для осесимметричных течений уравнения (2.6) и (2.7) могут быть упрощены. Учитывая, что $c_\perp=\sqrt{c_\rho^2+c_\varphi^2}$, $\operatorname{tg}\psi=c_\varphi/c_\rho$ и дифференцируя записанные выше выражения по c_ρ и c_φ, находим

$$\frac{\partial c_\perp}{\partial c_\rho}=\frac{c_\rho}{c_\perp}=\cos\psi,\qquad\frac{\partial\psi}{\partial c_\rho}=-\frac{\sin\psi}{c_\perp},$$

$$\frac{\partial c_\perp}{\partial c_\varphi}=\frac{c_\varphi}{c_\perp}=\sin\psi,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial c_\varphi}=\frac{\cos\psi}{c_\perp}.$$

Следовательно,

$$\frac{c_\varphi^2}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\rho}-\frac{c_\rho c_\varphi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial c_\varphi}=\frac{c_\perp^2\sin^2\psi}{\rho}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial c_\perp}\cos\psi-\frac{\partial Z_1}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{c_\perp}\right)-$$

$$-\frac{c_\perp^2\cos\psi\sin\psi}{\rho}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial c_\perp}\sin\psi+\frac{\partial Z_1}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{c_\perp}\right)=-\frac{c_\perp\sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial\psi}.$$

Аналогичные преобразования справедливы и для функции $Z_2(\rho,c_\perp,\psi)$. Таким образом, систему уравнений (2.6), (2.7) перепишем в виде

$$c_\perp\cos\psi\frac{\partial Z_1}{\partial\rho}-\frac{c_\perp\sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z_1}{\partial\psi}+Z_1(\rho,c_\perp,\psi)=\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}Z_1(\rho,c'_\perp,\psi')\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\psi,\qquad(2.8)$$

$$c_\perp\cos\psi\frac{\partial Z_2}{\partial\rho}-\frac{c_\perp\sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z_2}{\partial\psi}+Z_2(\rho,c_\perp,\psi)=0.\qquad(2.9)$$

Учитывая, что

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v})|_S=f(C)\left[1+2C_zU_0+G_Tz\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\right],$$

принятую в работе модель граничного условия и способ линеаризации искомого решения, определяемый равенством (2.3), граничные условия для функций $Z_1(\rho,c_\perp,\psi)$ и $Z_2(\rho,c_\perp,\psi)$ записываются в виде

$$Z_1(R,c_\perp,\psi)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}},\qquad Z_2(R,c_\perp,\psi)=1,\qquad \frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{3\pi}{2}.\qquad(2.10)$$

При записи (2.10) учли, что при отражении молекул газа от внутренней поверхности цилиндра $c_\rho=c_\perp\cos\psi\le 0$. Таким образом, нахождение функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, определяемой выражением (2.3), сводится к решению системы уравнений (2.8), (2.9) с граничными условиями (2.10).

3. Построение функции распределения

Перед тем как перейти к построению функции распределения вычислим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho)$. Исходя из статистического смысла функции распределения [14], с учетом (2.3) находим

$$q_z(\rho)=\frac{\gamma}{\pi^{3/2}}\int\exp(-C^2)C_z\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\left[2C_zU_0+G_T\left[\left(z-\frac{C_z}{C}\right)\left(C^2-\frac{5}{2}\right)-\frac{2}{3C_z\sqrt{\pi}}\right]+\right.$$

$$\left.+G_TC_z\left[Z_1(\rho,c_\perp,\psi)+\left(C-\frac{5}{2C}\right)Z_2(\rho,c_\perp,\psi)\right]\right]d^3\mathbf{C}=$$

$$=\frac{G_T}{\pi^{3/2}}\int\exp(-C^2)C_z^2\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\left(C-\frac{5}{2C}\right)(Z_2(\rho,c_\perp,\psi)-1)\,d^3\mathbf{C}.$$

Так как функция $Z_1(\rho, c_\perp, \psi)$ не вносит вклада в поток тепла, то в расматриваемой задаче можно ограничиться отысканием функции $Z_2(\rho, c_\perp, \psi)$, определяемой уравнением (2.7) с граничным условием (2.10). Решение уравнения (2.7) ищем в виде

$$Z_2(\rho, c_\perp, \psi) = Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1. \tag{3.1}$$

С учетом (3.1) уравнение и граничные условия для нахождения функции $Z(\rho, c_\perp, \psi)$ примут вид

$$c_\perp \cos\psi \frac{\partial Z}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin\psi}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial \psi} + Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1 = 0, \tag{3.2}$$

$$Z(R, c_\perp, \psi) = 0, \qquad \frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{3\pi}{2}. \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.2) с граничным условием (3.3) ищем методом характеристик, развитым в [13]. Система уравнений характеристик уравнения (3.2) имеет вид

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos\psi} = -\frac{\rho\, d\psi}{c_\perp \sin\psi} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}. \tag{3.4}$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos\psi} = -\frac{\rho\, d\psi}{c_\perp \sin\psi},$$

находим один первый интеграл системы характеристик (3.4)

$$\rho|\sin\psi| = C_1. \tag{3.5}$$

С учетом (3.5) уравнение

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos\psi} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}$$

перепишем в виде

$$\pm\frac{\rho\, d\rho}{c_\perp\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}. \tag{3.6}$$

Здесь верхний знак имеет место при $-\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2}$, нижний – при $\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{3\pi}{2}$. Интегрируя уравнение (3.6), находим другой первый интеграл системы характеристик

$$Z(\rho, c_\perp, \psi)\exp\left(\pm\frac{\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}{c_\perp}\right) = C_2. \tag{3.7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся условиями

$$C_1 = R|\sin\psi_0|, \qquad C_2 = \exp\left(\frac{R\cos\psi_0}{c_\perp}\right).$$

Здесь (R, ψ_0) – координаты точки отражения молекулы газа от поверхности цилиндра в плоскости, перпендикулярной его оси. Исключая из (3.5) и (3.7) постоянные интегрирования C_1 и C_2, приходим к системе уравнений относительно $Z(\rho, c_\perp, \psi)$ и ψ_0

$$\rho|\sin\psi| = R|\sin\psi_0|, \qquad (Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1)\exp\left(\frac{\rho\cos\psi}{c_\perp}\right) = \exp\left(\frac{R\cos\psi_0}{c_\perp}\right), \tag{3.8}$$

разрешив которую находим

$$Z(\rho, c_\perp, \psi) = \exp\left(-\frac{\rho\cos\psi + \sqrt{R^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{c_\perp}\right) - 1. \tag{3.9}$$

Таким образом, решение уравнения (2.7) с граничным условием (2.10) и соответственно искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построены.

4. Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho)$ и поток тепла J_Q, через поперечное сечение канала

$$q_z(\rho) = \frac{G_T\gamma}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2)C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\left(C - \frac{5}{2C}\right)(Z(\rho, c_\perp, \psi) - 1)\, d^3\mathbf{C} = \tag{4.1}$$

$$= \frac{G_T\gamma}{\pi^{3/2}} \int\limits_0^{+\infty} \exp(-C^2)C^3 \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)^2 dC \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{\rho\cos\psi + \sqrt{R^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\right) - 1\right] d\psi =$$

$$= -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\pi}} G_T \left[1 - \frac{3}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{\rho\cos\psi + \sqrt{R^2 - \rho^2\sin^2\psi}}{\sin\theta}\right) - 1\right] d\psi\right],$$

$$J_Q = \frac{4}{\gamma R^3} \int\limits_0^R q_z(\rho)\rho\, d\rho. \tag{4.2}$$

На стенке канала при $\rho = R$ выражение (4.1) принимает вид

$$q_z(\rho) = -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\pi}} G_T \left[1 - \frac{3}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2R\cos\psi}{\sin\theta}\right) d\psi\right], \tag{4.3}$$

Значения $q_z(\rho/R)/G_T$ для канала радиуса $R = 2$, рассчитанные согласно (4.1), приведены в таблице 1. Там же приведены аналогичные значения, полученные в [8] с использованием метода дискретных ординат на основе модели Шахова.

ρ/R	0.00	0.10	0.20	0.50	0.90	0.95	1.00
(4.1)	1.3234	1.3206	1.3118	1.2431	0.9233	0.8231	0.6428
[8]	1.4586	1.4550	1.4410	1.3579	0.9711	0.8536	0.6401

Таблица 1. Значения $q_z(\rho/R)/G_T$ для канала радиуса $R = 2$.

Значения потока тепла J_Q/G_T, рассчитанные согласно (4.2), и аналогичные значения, полученные в [8], приведены в таблице 2.

R'/l_g	0.001	0.01	0.02	0.1	1.0	2.0	10.0
(4.2)	3.3742	3.3086	3.2462	2.9337	1.6188	1.0953	0.2951
[8]	3.3695	3.2848	3.2167	2.8801	1.6745	1.1794	0.3410

Таблица 3. Значения J_Q/G_T при различных значениях $R = R'/l_g$.

Значения $q_z(R)/G_T$, вычисленные согласно (4.3) на стенке канала при различных значениях его радиуса $R = R'/l_g$, и аналогичные значения, полученные в [8], приведены в таблице 3.

R'/l_g	0.001	0.01	0.02	0.1	1.0	2.0	10.0
(4.3)	0.0013	0.0125	0.0240	0.1061	0.5108	0.6428	0.7653
[8]	0.0013	0.0122	0.0237	0.1022	0.4973	0.6406	0.8215

Таблица 3. Значения $q_z(R)/G_T$ при различных значениях $R = R'/l_g$.

Из приведенных таблиц видно, что полученные в работе результаты хорошо согласуются с аналогичными результатами [8] при $R'/l_g << 1$. Отличие соответствующих результатов при $R'/l_g > 1$ обусловлено тем, что при переходе к гидродинамическому пределу уравнение Вильямса приводит к значению числа Прандлтя, отличающемуся от соответствующего значения для одноатомного газа [14].

5. Заключение

Итак, в настоящей работе получено аналитическое решение задачи о переносе тепла в цилиндрическом канале при наличии продольного градиента температуры. Для произвольных значений радиуса цилиндра построен профиль вектора потока тепла и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что представленные в работе результаты совпадают с аналогичными результатами, полученными с использованием метода дискретных ординат.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках выполнения Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (проект № 3628).

Список литературы

1. Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев, *Движение разреженных газов в каналах и микроканалах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008.

2. Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов, *Прикладная динамика разреженного газа*, Машиностроение, М., 1977.

3. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967.

4. C. E. Siewert, “The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.

5. В. Попов, А. Юшканов, В. Лукашев, *Математическое моделирование процессов переноса в каналах. Монография.*, LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co, Saarbrucken, Germany, 2014, 116 с.

6. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения”, Журнал вычислительной математики и математической физики, **50**, 2010, 1285–1302.

7. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice”, *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, **27** (2008), 810–822.

8. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, "An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.

9. P. Taheri, M. Bahrami, "Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels", *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.

10. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, "A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct", *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.

11. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, "Численный анализ винтового течения Куэтта разреженного газа между коаксиальными цилиндрами", Журнал вычислительной математики и математической физики, **46**, 2006, 527–535.

12. I. Graur, F. Sharipov, "Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction", *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27** (2008), 335-345.

13. Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов, "Электрическое поглощение мелкой металлической частицы цилиндрической формы", Журнал технической физики, **75**, 2005, 3–9.

14. А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография*, МГОУ, М., 2004.

Mathematical modeling of the process heat transfer in a long cylindrical channel

© O. V. Germider [4], V. N. Popov [5], A. A. Yushkanov[6]

Abstract. Within the framework of the kinetic approach the problem of the flow of rarefied gas in a cylindrical channel with longitudinal temperature gradient is solved. As the basic equation, that describes the kinetics of the process, the Williams kinetic equation, and as a boundary condition on the wall of the channel - a model of diffuse reflection are used. The deviation from the equilibrium state of the gas is assumed small. It allowed to consider the solution of the problem in the linearized form. In order to find a linear correction to the local equilibrium distribution function the problem is reduced to solving a linear homogeneous differential equation of the first order. It's solution is constructed using the method of characteristics. The obtained solution is used to construct the profile of the heat flux vector in the channel and the heat flux through the cross section of the channel. The numerical analysis of the final expressions is done. A comparison with similar results obtained by using the method of discrete ordinates, showed that the procedure proposed in the decision leads to the correct result in a wide range of channel radius.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, method of characteristics, models of boundary conditions

[4] Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; o.germider@narfu.ru.

[5] Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

[6] Professor of the Department of Theoretical Physics, Moscow State Regional University, Moscow; yushkanov@inbox.ru.