

УДК 533.6.013.4

Исследование динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. В статье предложена математическая модель динамической системы, состоящей из n упругих пластин типа «тандем», обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости). Аэрогидродинамические воздействия на пластины определяются из асимптотических уравнений движения жидкости или газа в модели идеальной несжимаемой среды. Поведение упругого материала описывается линейной моделью. Для решения задачи используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий находить решение этой системы уравнений и производить исследование динамики системы пластин. Программа позволяет строить графики колебаний, на основании которых можно судить об амплитуде и частоте колебаний и делать вывод об их устойчивости. На основе численного эксперимента проводится анализ зависимости характера колебаний упругих пластин от параметров механической системы.

Ключевые слова: аэроупругость, динамика, упругая пластина, система типа «тандем», деформация, обтекание, дозвуковой поток.

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности,

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

² Зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [4]).

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1, 5, 11], так и зарубежные [9, 10, 12] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке, и только небольшая часть работ посвящена обтеканию пластин и оболочек дозвуковым потоком газа, что указывает на сложность исследования динамики упругих тел при указанном режиме обтекания и требует более пристального и глубокого внимания к этим задачам.

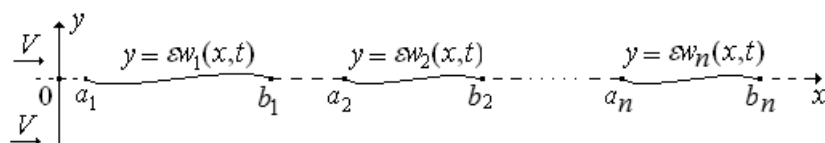
В статье рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы n упругих пластин типа «тандем» (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеальной несжимаемой среды (жидкости или газа). Работа является продолжением исследований устойчивости деформируемых пластин, находящихся в потоке газа или жидкости [3]. В частности, проведено обобщение результатов работы [2] (случай двух пластин) на случай произвольного количества пластин. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий производить исследование динамики системы пластин.

Поведение упругого материала в работе описывается линейной моделью. Для решения связанной задачи аэрогидроупругости используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов.

На основе численного эксперимента проводится анализ зависимости характера колебаний упругих пластин как от параметров механической системы, в т.ч. от значения скорости набегающего потока, так и от их взаимного влияния друг на друга. Этот анализ позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости колебаний.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы n упругих пластин типа «тандем» (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеального несжимаемого газа. Пусть в состоянии покоя пластинам в физической плоскости xOy соответствуют на оси Ox отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1 \div n$, где $a_{k+1} > b_k$, $k = 1 \div n - 1$ (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Двустороннее безотрывное обтекание системы n упругих пластин

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Будем предполагать, что прогибы пластин и возмущение однородного потока малы, то есть $\bar{w}_k(x, t) = \varepsilon w_k(x, t)$, $\bar{\phi}(x, y, t) = Vx + \varepsilon\phi(x, y, t)$, $\varepsilon \ll 1$, $k = 1 \div n$. Здесь $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ и $\bar{\phi}$ — соответственно прогибы пластин и потенциал скорости возмущенного потока газа.

Потенциал ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus ([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]), \quad (2.1)$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_t^2)_\infty = 0 \quad (2.2)$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\phi_y^\pm = \dot{w}_k + Vw_k', \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n, \quad (2.3)$$

где $\phi_y^\pm = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \phi_y(x, y, t)$.

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа на пластины

$$Q = \rho(\phi_t^+ - \phi_t^-) + \rho V(\phi_x^+ - \phi_x^-).$$

Аэродинамические воздействия на пластины, зависящие от поперечных составляющих их деформаций $w_k(x, t)$, $k = 1 \div n$, выражаются через потенциал скорости $\phi(x, y, t)$ по формулам

$$P_k(x, t) = \rho(\phi_t^+ - \phi_t^-) + \rho V(\phi_x^+ - \phi_x^-), \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n, \quad y = 0. \quad (2.4)$$

Для примера рассмотрим линейную модель упругого тела:

$$\begin{aligned} M_k \ddot{w}_k(x, t) + D_k w_k''''(x, t) + N_k w_k''(x, t) + \beta_{0k} w_k(x, t) + \\ + \beta_{1k} \dot{w}_k(x, t) + \beta_{2k} \dot{w}_k''''(x, t) = P_k(x, t), \quad k = 1 \div n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка — частные производные по x и t соответственно; ρ — плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D_k, M_k — изгибные жесткости и погонные массы упругих пластин; N_k — сжимающие (растягивающие) упругие пластины силы; β_{1k}, β_{2k} — коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования пластин; β_{0k} — коэффициенты жесткости оснований.

3. Решение аэрогидродинамической части задачи

Выражая потенциал $\phi(x, y, t)$ через функции прогиба $w_k(x, t)$, запишем уравнения колебаний пластин (2.4), (2.5) относительно этих функций. С этой целью в области G введем комплексный потенциал $W = f(z, t) = \phi + i\psi$, где $\psi = \psi(x, y, t)$ — функция тока, $z = x + iy$. Для функции скоростей $f_z(z, t) = \phi_x - i\phi_y$ согласно условиям (2.1), (2.3) имеем следующее интегральное представление [8, с.52-54]

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - z} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right), \quad (3.1)$$

где $h(z) = (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2) \dots (z - a_{n-1})(z - b_{n-1})(z - a_n)(b_n - z)$, $v_k(\tau, t) = \dot{w}_k(\tau, t) + Vw'_k(\tau, t)$, $k = 1 \div n$; $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ — действительные функции, определяющие циркуляцию скорости газа вокруг каждой пластины. Ветвь корня в формуле (3.1) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i\sqrt{(x - a_1)(x - b_1)(x - a_2)(x - b_2) \dots (x - a_n)(x - b_n)}, \quad z = x > b_n. \quad (3.2)$$

Разложение функции $f_z(z, t)$ в окрестности $z = \infty$ начинается с члена порядка $1/z^{n+1}$, поэтому общая циркуляция равна нулю. Циркуляция вокруг каждой пластины может отличаться от нуля. Заметим также, что $(\phi_x^2 + \phi_y^2)_\infty = 0$.

Перейдем в (3.1) к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$. Согласно условию (3.2) имеем

$$\sqrt{h(z)} = \pm(-1)^k \sqrt{h(x)}, \quad z = x \pm i0, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n. \quad (3.3)$$

Применяя формулы Сохоцкого [7] и учитывая (3.3), получим

$$\phi_x^\pm - i\phi_y^\pm = \mp \frac{1}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) - iv_1(x, t),$$

$$x \in (a_1, b_1),$$

следовательно,

$$\phi_x^+ - \phi_x^- = -\frac{2}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad (3.4)$$

$$x \in (a_1, b_1).$$

Аналогично, при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_m, b_m)$, находим

$$\phi_x^+ - \phi_x^- = \frac{2(-1)^s}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad (3.5)$$

$$x \in (a_s, b_s), \quad s = 2 \div n.$$

Для комплексного потенциала имеем следующее выражение

$$W = f(z, t) = \int_{a_1}^z f_z(z, t) dz + C(t), \quad (3.6)$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени, $z \in G$. Так как G — n -связная область, то интеграл, вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Следовательно, потенциал ϕ , а значит и аэродинамические воздействия (2.4) однозначно не определяются. Подберем функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ так, чтобы циркуляция вокруг каждой пластины равнялась нулю.

При обходе разреза $[a_s, b_s]$ против часовой стрелки циркуляция $\Gamma_s(t) = \int_{a_s}^{b_s} \phi_x^- dx + \int_{b_s}^{a_s} \phi_x^+ dx = \int_{a_s}^{b_s} (\phi_x^- - \phi_x^+) dx$, $s = 1 \div n$. Воспользовавшись формулами (3.4), (3.5), получим

$$\Gamma_s(t) = \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \int_{a_s}^{b_s} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) dx. \quad (3.7)$$

Покажем, что сумма циркуляций равна нулю. Согласно (3.7)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \Gamma_s(t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} v_k(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} \right) d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В полуплоскости рассмотрим аналитическую функцию $g_1(z) = 1/\sqrt{h(z)}$. В силу выбора ветви корня (3.2) на границе полуплоскости ($Imz = y = 0$) имеем

$$Re \{g_1(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \dots \cup (b_n, +\infty), \\ (-1)^s / \sqrt{h(x)}, & x \in (a_s, b_s), s = 1 \div n. \end{cases}$$

Представим $g_1(z)$ с помощью интеграла Шварца [7]

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-z)}. \quad (3.9)$$

При $z \rightarrow x \in (a_1, b_1)$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{h(x)}} = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\pi i}{\sqrt{h(x)}} + \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} \right).$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} = 0, \quad x \in (a_1, b_1)$$

или

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} = 0, \quad \tau \in (a_1, b_1). \quad (3.10)$$

Аналогично при $z \rightarrow x \in (a_s, b_s)$, $s = 2 \div n$, получим

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} = 0, \quad \tau \in (a_s, b_s). \quad (3.11)$$

Полагая в (3.9) $z = x > b_n$, будем иметь

$$\frac{\pi}{\sqrt{-h(x)}} = \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0. \quad (3.12)$$

В полуплоскости рассмотрим аналитические функции $g_2(z) = z^k / \sqrt{h(z)}$, $k = 1 \div n - 2$. В силу выбора ветви корня (3.2) на границе полуплоскости ($Imz = y = 0$) имеем

$$Re \{g_2(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \dots \cup (b_n, +\infty), \\ (-1)^{s+1} x^k / \sqrt{h(x)}, & x \in (a_s, b_s). \end{cases}$$

Представим $g_2(z)$ с помощью интеграла Шварца [7]

$$g_2(z) = \frac{z^k}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)}. \quad (3.13)$$

Полагая в (3.9) $z = x > b_n$, будем иметь

$$\frac{\pi x^k}{\sqrt{-h(x)}} = \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\sum_{s=1}^n \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0, \quad k = 1 \div n - 2. \quad (3.14)$$

Из равенств (3.10) – (3.12), (3.14) следует, что $\sum_{s=1}^n \Gamma_s(t) = 0$.

Положим $\Gamma_1(t) = 0, \dots, \Gamma_{n-1}(t) = 0$ и найдем функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ как решение системы

$$\int_{a_s}^{b_s} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) dx = 0, \quad s = 1 \div n - 1. \quad (3.15)$$

Элементы основной матрицы системы (3.15) равны

$$H_{sk} = \int_{a_s}^{b_s} \frac{x^{k-1}}{\sqrt{h(x)}} dx, \quad s, k = 1 \div n - 1.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\gamma_k(t) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{p=1}^n \tilde{H}_{sk} \int_{a_s}^{b_s} dx \int_{a_p}^{b_p} \frac{(-1)^p v_p(\tau, t) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau - x)} d\tau, \quad k = 1 \div n - 1, \quad (3.16)$$

где введено обозначение $\tilde{H} = H^{-1}$. Тогда из равенств $\Gamma_1(t) = 0, \dots, \Gamma_{n-1}(t) = 0$ следует, что $\Gamma_n(t) = -\sum_{s=1}^{n-1} \Gamma_s(t) = 0$. В этом случае интеграл от функции $f_z(z, t)$ по любому замкнутому контуру, принадлежащему области G , равен нулю. Отсюда следует, что значение потенциала W , определяемое формулой (3.6), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки a_1 и z . Поскольку

$$W = \phi + i\psi = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{z} + \dots$$

в окрестности $z = \infty$, то функцию $C(t)$ в (3.6) можно подобрать так, чтобы выполнялось условие $(\phi_t)_\infty = 0$.

Чтобы найти предельные значения $\phi(x, y, t)$ на границе области G , преобразуем каждый из интегралов в правой части формулы (3.1). Интегрируя по частям, получим

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right), \quad (3.17)$$

где $\bar{v}_k(\tau, t) = \int_{a_k}^{\tau} v_k(x, t) dx$, $k = 1 \div n$.

Так как $\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)h'(\tau) - 2h(\tau)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}$, $\left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z = \frac{(\tau - z)h'(z) + 2h(z)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(z)}}$, то

$$\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau))}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}.$$

Введем обозначение

$$\theta(z, \tau) = \frac{(\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau))}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}, \quad (3.18)$$

Поэтому, с учетом того, что

$$\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = -\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \theta(z, \tau), \quad (3.19)$$

имеем

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z d\tau + \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t) \theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.20) в (3.6), получим

$$W = \phi + i\psi = \frac{\sqrt{h(z)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^z \frac{\theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} dz + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^z \frac{z^{k-1} dz}{\sqrt{h(z)}} + C(t). \quad (3.21)$$

Отсюда при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$, находим

$$\phi^{\pm} + i\psi^{\pm} = \frac{\mp \sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\pm \pi i \frac{\bar{v}_1(x, t)}{\sqrt{h(x)}} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\mp \sqrt{h(x)}} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^x \frac{x^{k-1} dx}{\mp \sqrt{h(x)}} + C(t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \phi^+ - \phi^- &= \frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad x \in (a_1, b_1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогичным образом, сначала интегрируя (3.20) от a_s до z , затем переходя к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_s, b_s)$, $s = 2 \div n$, будем иметь

$$\begin{aligned} \phi^+ - \phi^- &= \frac{2(-1)^{s+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_m}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_m}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad x \in (a_s, b_s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Согласно формулам (3.4), (3.5), (3.22), (3.23) аэродинамические воздействия (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} P_s(x, t) &= \frac{2\rho(-1)^{s+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2\rho(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \tilde{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_m}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2\rho(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\gamma}_k(t) \int_{a_m}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} + \\ &+ \frac{2\rho V(-1)^s}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad x \in (a_s, b_s), \quad s = 1 \div n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В (3.24) $\tilde{v}_k(\tau, t) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = \int_{a_k}^{\tau} (\ddot{w}_k(x, t) + V \dot{w}'_k(x, t)) dx$, $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ определяются равенствами (3.16), $\theta(z, \tau)$ определяется равенством (3.18).

Таким образом, учитывая (2.5), получили связанную систему уравнений относительно функций прогиба $w_1(x, t), \dots, w_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} M_i \ddot{w}_i(x, t) + D_i w_i''''(x, t) + N_i w_i''(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) + \\ + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) &= \frac{2\rho(-1)^{i+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2\rho(-1)^{i+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \tilde{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2\rho(-1)^{i+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\gamma}_k(t) \int_{a_i}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} + \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$+ \frac{2\rho V(-1)^i}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad x \in (a_i, b_i), \quad i = 1 \div n.$$

Система (3.25) получена при любых способах закреплений концов упругих пластин. Пусть концы пластин закреплены жестко или шарнирно, тогда граничные условия для $w_i(x, t)$ имеют вид

$$w_i(x, t) = w'_i(x, t) = 0, \quad w_i(x, t) = w''_i(x, t) = 0; \quad x = a_i, \quad x = b_i, \quad i = 1 \div n. \quad (3.26)$$

4. Исследование динамики пластин

Решение системы уравнений (3.25) будем искать методом Галеркина, подчинив каждую искомую функцию $w_i(x, t)$, $i = 1 \div n$ крайевым условиям (3.26). Зададим также начальные условия

$$w_i(x, 0) = f_{1i}(x), \quad \dot{w}_i(x, 0) = f_{2i}(x), \quad x \in [a_i, b_i], \quad i = 1 \div n, \quad (4.1)$$

которые должны быть согласованы с крайевыми условиями.

Согласно методу Галеркина каждую неизвестную функцию системы уравнений (3.25) будем искать в виде

$$w_i(x, t) = \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) g_{ij}(x), \quad (4.2)$$

где $g_{ij}(x)$, $x \in [a_i, b_i]$ — базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные крайевые условия, а функции $c_{ij}(t)$, $t \geq 0$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_{ij}(x) = A_{ij} \cos \gamma_{ij}(x - a_i) + B_{ij} \sin \gamma_{ij}(x - a_i) + C_{ij} \operatorname{ch} \gamma_{ij}(x - a_i) + D_{ij} \operatorname{sh} \gamma_{ij}(x - a_i), \quad (4.3)$$

$$i = 1 \div n, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ и параметр γ_{ij} выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка $[a_i, b_i]$, в соответствии с (3.26), выполнялось одно из следующих условий:

$$1) g_{ij}(x) = g'_{ij}(x) = 0; \quad 2) g_{ij}(x) = g''_{ij}(x) = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Тогда функции $w_i(x, t)$ вида (4.2) будут удовлетворять условиям (3.26). Заметим, что γ_{ij} и $g_{ij}(x)$ — собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g_i^{IV}(x) = \gamma_i^4 g_i(x) \quad (4.5)$$

с граничными условиями (4.4). Задача (4.5), (4.4) — самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_{ij}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ортогональна на $[a_i, b_i]$ [6], т.е. справедливы равенства

$$\int_{a_i}^{b_i} g_{ik}(x) g_{is}(x) dx = \begin{cases} \Delta_{ik}, & k = s; \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad \int_{a_i}^{b_i} g_{ik}^{(4)}(x) g_{is}(x) dx = \begin{cases} \gamma_{ik}^4 \Delta_{ik}, & k = s; \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$i = 1, \div n, \quad k, s = 1 \div m.$$

Условия ортогональности невязок i -го уравнения системы (3.25) к базисным функциям $\{g_{is}(x)\}_{s=1}^m$ позволяют записать систему уравнений для $c_{is}(t)$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (A_{ikjs} \ddot{c}_{kj}(t) + B_{ikjs} \dot{c}_{kj}(t) + C_{ikjs} c_{kj}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} A_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} M_i + \frac{2\rho(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{a_k}^{\tau} g_{kj}(x) dx \right) \left[\frac{\sqrt{h(x)}}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} - \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx \right] \times \\ &\times g_{is}(x) d\tau - \frac{2\rho(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} g_{is}(x) \left(\int_{a_i}^x \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right) dx; \\ B_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} (\beta_{2i} \gamma_{ik}^4 + \beta_{1i}) + \\ &+ \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} g_{kj}(\tau) g_{is}(x) \left(\frac{h(x) + h(\tau)}{\sqrt{h(x)} \sqrt{h(\tau)} (\tau-x)} - \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx \right) d\tau - \\ &- \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} g_{is}(x) \left(\int_{a_i}^x \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right) dx + \\ &- \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} \frac{x^{p-1} \cdot g_{is}(x)}{\sqrt{h(x)}} dx; \\ C_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} (D_i \gamma_{ik}^4 + \beta_{0i}) + \delta_{ik} N_i \int_{b_i}^{c_i} g''_{kj}(x) g''_{is}(x) dx + \\ &+ \frac{2\rho V^2(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \cdot g_{is}(x) \sqrt{h(\tau)}}{\tau-x \sqrt{h(x)}} d\tau - \\ &- \frac{2\rho V^2(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} \frac{x^{p-1} \cdot g_{is}(x)}{\sqrt{h(x)}} dx, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Получили систему $m \cdot n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения $m \cdot n$ неизвестных функций.

Условия ортогональности невязки начальных условий (4.1) к базисным функциям позволяют найти начальные условия $c_{kj}(0)$, $c'_{kj}(0)$:

$$c_{kj}(0) = \frac{1}{\Delta_{kj}} \int_{a_k}^{b_k} f_{1k}(x) g_{kj}(x) dx, \quad c'_{kj}(0) = \frac{1}{\Delta_{kj}} \int_{a_k}^{b_k} f_{2k}(x) g_{kj}(x) dx, \quad k = 1 \div n, \quad j = 1 \div m. \quad (4.8)$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы уравнений (4.7) с начальными условиями (4.8), на основе решения которой можно проводить исследование динамики для конкретных значений параметров механической системы.

5. Численный эксперимент в задаче о динамике упругих пластин

На основе решения задачи Коши (4.7), (4.8) проведен численный эксперимент по исследованию динамики пластин при различных параметрах механической системы. Рассмотрим пример одной такой системы. В потоке находятся две пластины ($n = 2$). Рабочая среда — воздух ($\rho = 1$), пластины изготовлены из алюминия (модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, линейная плотность $\rho_{pl} = 8480$).

Возьмем следующие параметры механической системы: $a_1 = 2$; $b_1 = 3$; $a_2 = 7$; $b_2 = 8$; $\beta_{01} = \beta_{02} = 4$; $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0,1$; $N_1 = N_2 = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

Пусть концы пластин закреплены жестко, тогда базисные функции (4.3) примут вид

$$g_{ij}(x) = \sin \gamma_{ij}(x - a_i) - \operatorname{sh} \gamma_{ij}(x - a_i) + \frac{\cos \gamma_{ij}(b_i - a_i) - \operatorname{ch} \gamma_{ij}(b_i - a_i)}{\sin \gamma_{ij}(b_i - a_i) + \operatorname{sh} \gamma_{ij}(b_i - a_i)} \times \\ \times (\cos \gamma_{ij}(x - a_i) - \operatorname{ch} \gamma_{ij}(x - a_i)), \quad i = 1 \div n, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

где γ_{ij} являются корнями уравнения

$$\cos \gamma_{ij}(b_i - a_i) \operatorname{ch} \gamma_{ij}(b_i - a_i) = 1.$$

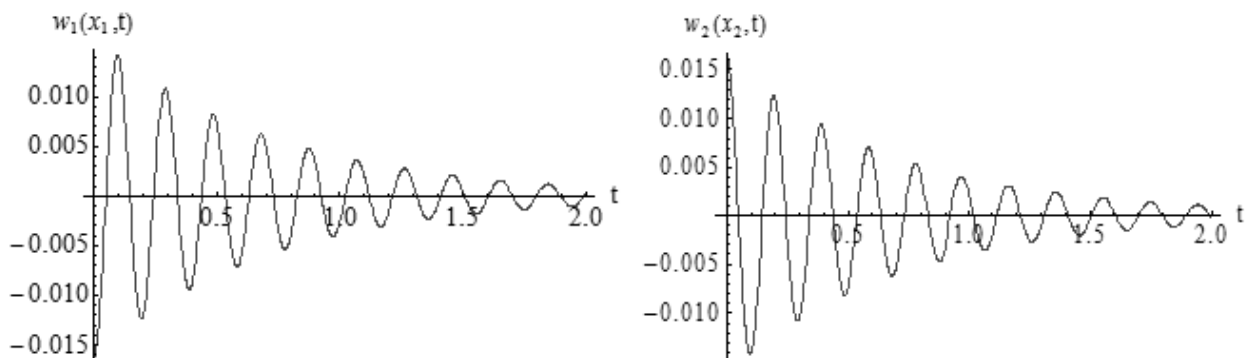
Зададим начальные условия в виде

$$w_1(x, 0) = 0,01 \cdot g_{11}(x), \quad \dot{w}_1(x, 0) = -0,005 \cdot g_{11}(x),$$

$$w_2(x, 0) = -0,01 \cdot g_{21}(x), \quad \dot{w}_2(x, 0) = 0,005 \cdot g_{21}(x).$$

С помощью математической системы Mathematica на отрезке $t \in [0; 10]$ получим графики функций $w_1(x, t) = \sum_{j=1}^4 c_{1j}(t)g_{1j}(x)$ при $x = x_1 = 2,5$ и $w_2(x, t) = \sum_{j=1}^4 c_{2j}(t)g_{2j}(x)$ при $x = x_2 = 7,5$ при различных скоростях набегающего потока для упругих пластин различной толщины (рис. 5.1–5.4).

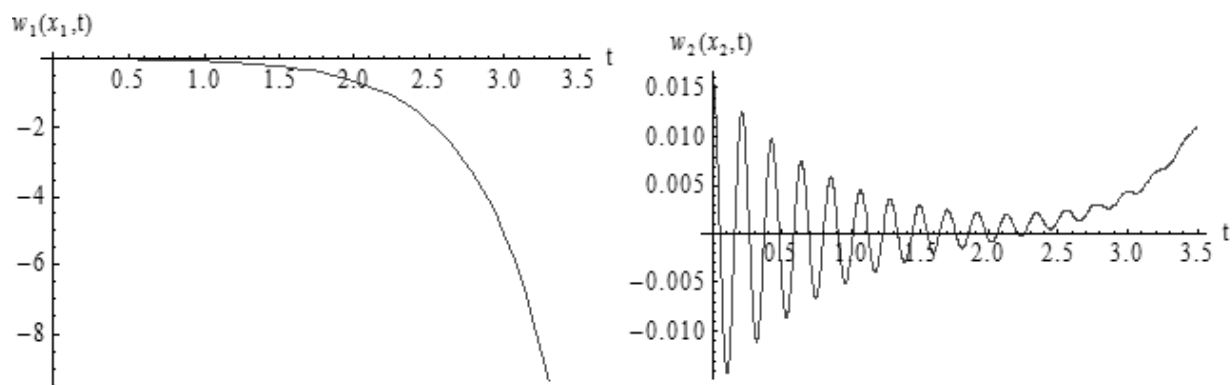
I. $V = 40$; $h_1 = h_2 = h = 0,002$; $D_1 = D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 51,6$; $M_1 = M_2 = \rho_{pl}h = 17,0$



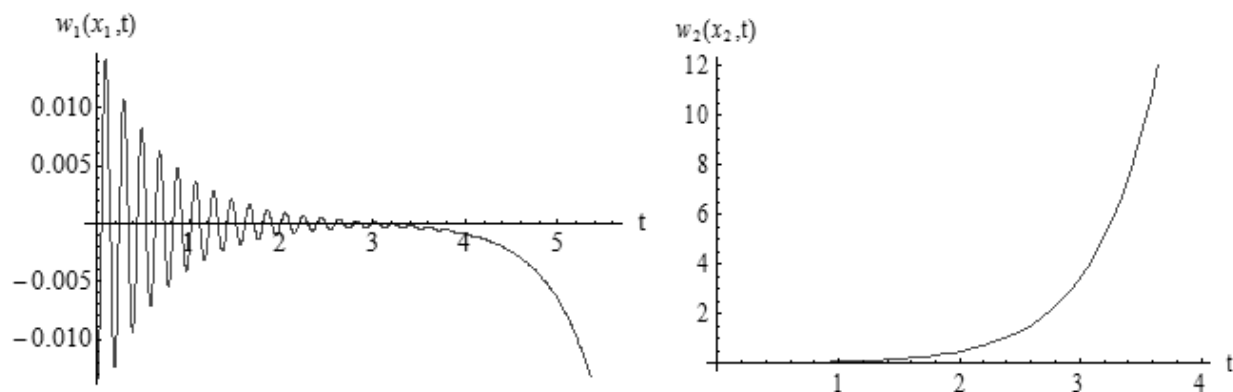
Р и с у н о к 5.1

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$

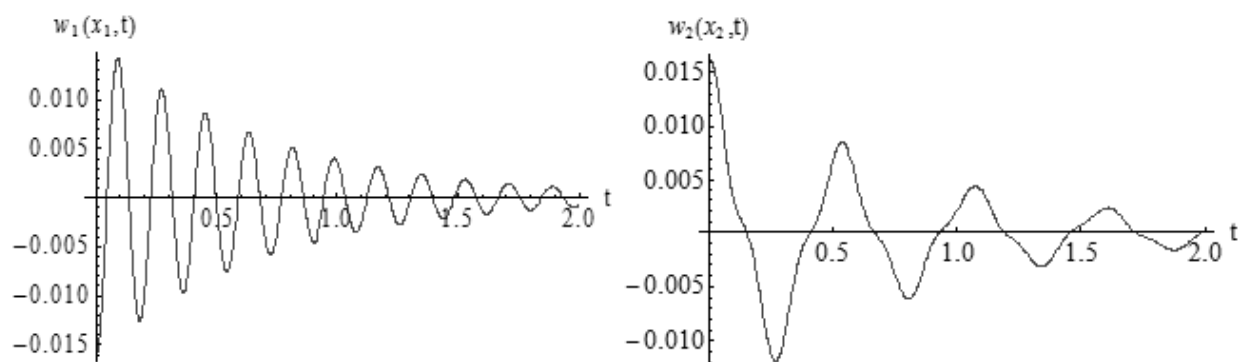
II. $V = 40$; $h_1 = 0,0013$; $h_2 = 0,002$; $D_1 = 14,2$; $D_2 = 51,6$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$



Р и с у н о к 5.2

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$ III. $V = 40$; $h_1 = 0,002$; $h_2 = 0,0013$; $D_1 = 51,6$; $D_2 = 14,2$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$ 

Р и с у н о к 5.3

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$ IV. $V = 30$; $h_1 = 0,002$; $h_2 = 0,0013$; $D_1 = 51,6$; $D_2 = 14,2$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$ 

Р и с у н о к 5.4

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$

Анализируя рисунки 5.1–5.3, видим, что при уменьшении толщины пластин колебания могут стать неустойчивыми, причем неустойчивость колебаний хотя бы одной из пластин приводит к неустойчивости всей системы. А из анализа рисунков 5.3, 5.4 следует, что при увеличении скорости набегающего потока колебания так же могут стать неустойчивыми.

6. Заключение

На основе предложенной математической модели динамической системы типа «тандем», состоящей из n упругих пластин, последовательно расположенных друг за другом вдоль одной линии и обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости), дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий находить решение полученной после этого связанной системы интегродифференциальных уравнений для прогибов пластин и производить исследование динамики системы пластин. Программа позволяет строить графики колебаний, на основании которых можно судить об амплитуде и частоте колебаний и делать вывод об их устойчивости. В дальнейшем планируется разработать программный модуль, позволяющий строить области устойчивости на плоскостях изменения двух выбранных параметров механической системы.

Проведенное исследование является фундаментом для решения задач о динамике упругих элементов произвольного количества отдельно расположенных конструкций при обтекании их потоком газа или жидкости, например, о динамике элеронов нескольких крыльев летательных аппаратов, движущихся в следе друг за другом.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 247 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Решетников Ю. А., «Математическое моделирование одной динамической системы типа «тандем»», *Журнал Средневолжского математического общества*, **12:3** (2010), 19–28.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
4. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., «Гидродинамический излучатель», *Патент России №2062662*, 27.06.1996. МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Бюл. №18.
5. Кийко И. А., Показеев В. В., «К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа», *Механика жидкости и газа*, 2009, № 1, 159–166.
6. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.
7. Лаврентьев М. А., *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973, 736 с.
8. Седов Л. И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Наука, М., 1980, 448 с.
9. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y., «Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid», *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 7, 2014, № 6, 1133–1148.

10. Kounadis A.N., “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.
11. Vedeneev V.V., “Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds”, *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
12. Willems S., Gulhan A. and Esser B., “Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow”, *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285–308.

Investigation of dynamic of one aeroelastical system of «tandem» species.

© A. V. Ankilov³, P. A. Velmisov⁴

Abstract. The article proposes a mathematical model of the dynamical system consisting of the n elastic plates of «tandem» species flowing along of the subsonic flow of gas (liquid). The aerohydrodynamic impact on the plates is determined from the asymptotic equations of motion of a liquid or gas in the model of an ideal incompressible environment. The behavior of the elastic material is described by a linear model. For solving problem, the approach based on the construction of the solutions of aerohydrodynamic part of the two-dimensional boundary-value problem for Laplace’s equation by methods of complex analysis is used. While the aerohydrodynamic load (pressure of liquid or gas) is defined through the functions describing the unknown deformations of the plates. Under the substitution of the pressure expression in the equation of oscillations of the plates the solution of the problem is reduced to the study of systems of coupled integro-differential equations with partial derivatives for the deformations functions. On the basis of the Bubnov-Galerkin method a software product is created. This product allows to find the solution of system of equations and to produce the investigation of the dynamics of the plates system. The program may to build the oscillations graphics the based on which we can to discuss the amplitude and frequency of oscillations and to make conclusions about their stability. On the basis of the numerical experiment the dependences of the character of the oscillations of elastic plates are analyzed from the parameters of the mechanical system.

Key Words: aerohydroelasticity, dynamic, elastic plate, system of «tandem» species, deformation, flow along the plate, subsonic flow

³ Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁴ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.