УДК 517.929

Условия существования интегралов системы уравнений движения

© **А. В. Зубов** [1], **А. Ф. Зубова** [2], **О. А. Пустовалова** [3]

Аннотация. В данной работе получен аналог известной теоремы Харитонова на случай однородных классов эквивалентности неустойчивых интервальных полиномов. В.Л. Харитоновым установлено, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно, чтобы четыре его угловых полинома были устойчивы [5]. Основной результат наших исследований заключается в том, что получены необходимые и достаточные условия того, что неустойчивый интервальный полином является однородным, т. е. состоит из полиномов, имеющих одинаковое число корней, лежащих как в левой, так и в правой полуплоскости. Полученные условия несколько сложнее, чем у В.Л. Харитонова, но они позволяют также как и в случае устойчивых полиномов, бесконечномерную задачу свести к конечномерной задаче.

Ключевые слова: полином, степень, вещественный коэффициент, корень, класс эквивалентности, прямоугольник, радиус - вектор, комплексная плоскость, параллельная ось, часовая стрелка

Определение 1.1. *Полином степени n с вещественными коэффициентами*

$$\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0,$$

не имеющий нулевых и чисто мнимых корней, принадлежит классу (n,k) - эквивалентности, если k его корней (с учетом их кратностей) лежат в правой полуплоскости [1].

Определение 1.2. *Интервальный полином с вещественными коэффициентами*

$$F(s) = \begin{cases} f(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \\ i = \overline{0,n}, \quad \underline{a}_0 \cdot \bar{a}_0 > 0, \quad \underline{a}_n \cdot \bar{a}_n > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

называется интервальным полиномом класса (n,k) - эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n,k) - эквивалентности.

Определение 1.3. *Угловыми полиномами $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$ интервального полинома* (1.1) *будем называть угловые полиномы Харитонова, задаваемые следующими равенствами:*

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \ldots, \\ f_2(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \ldots, \\ f_3(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \ldots, \\ f_4(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Т е о р е м а 1.1. *Для того чтобы интервальный полином* (1.1) *являлся интервальным полиномом класса* (n,k) *- эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы: 1. Угловые полиномы* (1.2) *принадлежали классу* (n,k) *- эквивалентности; 2. Для всех вещественных корней* ω *полиномов*

$$\bar{g}(\omega)=\bar{a}_0\omega^2+\bar{a}_4\omega^4-\ldots,\quad \underline{g}(\omega)=\underline{a}_0-\bar{a}_2\omega^2+\underline{a}_4\omega^4-\ldots,$$

$$\bar{h}(\omega)=\bar{a}_1\omega-\underline{a}_3\omega^3+\bar{a}_5\omega^5-\ldots,\quad \underline{h}(\omega)=\underline{a}_1\omega-\bar{a}_3\omega^3+\underline{a}_5\omega^5-\ldots,$$

выполняются соотношения:

$$\text{если}\,\bar{h}(\omega)=0\quad \text{или}\quad \underline{h}(\omega)=0,\quad \text{то}\quad \underline{g}(\omega)\cdot\bar{g}(\omega)>0;$$

$$\text{если}\,\bar{g}(\omega)=0\quad \text{или}\quad \underline{g}(\omega)=0,\quad \text{то}\quad \underline{h}(\omega)\cdot\bar{h}(\omega)>0. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Необходимость.** Пусть интервальный полином (1.1) являлся интервальным полиномом класса (n,k) - эквивалентности. Тогда "угловые"полиномы (1.2) принадлежат этому классу, т. к. входят в это семейство. Далее очевидно, что концы всех радиус - векторов $f(i\omega)=g(\omega)+ih(\omega)$, получающихся из полиномов $f(s)$, входящих в интервальный полином (1.1) подстановкой в них $s=i\omega$, принадлежат прямоугольнику $\Gamma(\omega)$ комплексной плоскости с вершинами образованными "угловыми"радиус - векторами:

$$f_1(i\omega)=\Gamma_1(\omega)=\underline{g}(\omega)+i\underline{h}(\omega),\; f_2(i\omega)=\Gamma_2(\omega)=\underline{g}(\omega)+i\bar{h}(\omega),$$

$$f_3(i\omega)=\Gamma_3(\omega)=\bar{g}(\omega)+i\underline{h}(\omega),\quad f_4(i\omega)=\Gamma_4(\omega)=\bar{g}(\omega)+i\bar{h}(\omega).$$

Это утверждение вытекает из очевидных неравенств

$$\underline{g}(\omega)\le g(\omega)\le\bar{g}(\omega),\quad \underline{h}(\omega)\le h(\omega)\le\bar{h}(\omega), \tag{1.4}$$

которые справедливы у этих полиномов для всех $\omega\in[0,+\infty)$. В справедливости первого неравенства можно убедиться, умножив неравенства, заданные в определении 1

$$\underline{a}_0\le a_0\le\bar{a}_0,\quad -\bar{a}_2\le -a_2\le -\underline{a}_2,\; \underline{a}_4\le a_4\le\bar{a}_4,\ldots \tag{1.5}$$

соответственно на $1,\omega^2,\omega^4,\ldots$, а затем сложив. Второе неравенство доказывается аналогично.

При изменении ω от 0 до $+\infty$ прямоугольник $\Gamma(\omega)$ перемещается по комплексной плоскости, а его стороны остаются параллельными осям координат. При этом, согласно принципу аргумента, "угловые"радиус-векторы $\Gamma_1(\omega)$, $\Gamma_2(\omega)$, $\Gamma_3(\omega)$, $\Gamma_4(\omega)$ поворячиваются против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, так как соответствующие им "угловые"полиномы принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. При достаточно больших значениях величины ω прямоугольник $\Gamma(\omega)$ прекращает "вращаться"и остается в одном из квадрантов, так как $Argf_j(i\omega)\to\frac{\pi}{2}(n-2k)$ при $\omega\to+\infty$, $j=\overline{1,4}$.

Докажем, что прямоугольник $\Gamma(\omega)$ при своем перемещении не может пересекаться с началом координат ни по одной из своих сторон. Это и будет эквивалентно выполнению условий (1.3).

Заметим, что ни одна из вершин прямоугольника $\Gamma(\omega)$ не может пересекаться с началом координат. Ибо это будет означать, что угловой полином имеет мнимый корень.

Допустим, например, что имеет место пересечение прямоугольника $\Gamma(\omega)$ по своей нижней стороне с началом координат. Это означает, что для некоторого $\omega_0 > 0$ справедливы соотношения $\underline{h}(\omega_0) = 0$, $\underline{g}(\omega_0) < 0$, $\bar{g}(\omega_0) > 0$.

Покажем, что существует полином $g(\omega)$ такой, что коэффициенты этогополинома удовлетворяют интервальным ограничениям (1.5) и, следовательно, условиям (1.4) $\underline{g}(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}(\omega)$, а, кроме того, выполняется равенство $g(\omega_0) = 0$.

Для этого рассмотрим полином $\tilde{g}(t,\omega)$ с коэффициентами, зависящими от параметра t

$$\tilde{g}(t,\omega) = \underline{a}_0 + t(\bar{a}_0 - \underline{a}_0) - (\bar{a}_2 + t(\underline{a}_2 - \bar{a}_2))\omega^2 +$$

$$+(\underline{a}_4 + t(\bar{a}_4 - \underline{a}_4))\omega^4 - (\bar{a}_6 + t(\underline{a}_6 - \bar{a}_6))\omega^6 + \ldots .$$

Нетрудно видеть, что для любого фиксированного $t \in [0,1]$ коэффициенты этого полинома удовлетворяют интервальным ограничениям (1.5) и, соответственно условиям (1.4). Это означает, что при $t \in [0,1]$ полином $f(s) = \tilde{g}(t,-si) + ih(-si)$ входит в семейство интервальных полиномов (1.1) принадлежащих классу (n,k) - эквивалентности.

Далее рассмотрим линейную функцию одной переменной t, $\tilde{g}(t,\omega_0)$. Так как справедливы неравенства $\tilde{g}(0,\omega_0) = \underline{g}(\omega_0) < 0$ и $\tilde{g}(1,\omega_0) = \bar{g}(\omega_0) > 0$, то существует $t_0 \in (0,1)$ такое, что $\tilde{g}(t_0,\omega_0) = 0$.

Отсюда вытекает, что полином $f(s) = \tilde{g}(t_0,-si) + ih(-si)$ имеет мнимый корень $i\omega_0$, т. к. вещественная и мнимая часть его годографа Михайлова в этой точке равна нулю $\tilde{g}(t_0,\omega_0) = \underline{h}(\omega_0) = 0$. Это противоречит тому, что полином $f(s) = \tilde{g}(t_0,-si) + ih(-si)$ принадлежит классу (n,k) - эквивалентности, как было установлено выше.

Заметим, что нами параллельно доказано более сильное утверждение о том, что для любого $\omega \in [0,+\infty)$ множество значений годографов Михайлова семейства интервальных полиномов (1.1), принадлежащих классу (n,k) - эквивалентности, полностью заполняет прямоугольник $\Gamma(\omega)$.

Достаточность. Выполнение условий теоремы означает, что прямоугольник $\Gamma(\omega)$ - содержащий все радиус - вектора $f(i\omega) = g(\omega)+ih(\omega)$, получающиеся из полиномов $f(s)$, входящих в интервальный полином (1.1) подстановкой в них $s = i\omega$, при изменении ω от 0 до $+\infty$, поворячивается против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, не пересекаясь с началом координат. Это означает, что все годографы Михайлова полиномов этого семейства, являющиеся кривыми образованными концами этих радиус-векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$, поворячиваются против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, не пересекаясь с началом координат, то есть, согласно принципу аргумента, принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. *Теорему Харитонова [5] можно рассматривать как частный случай данной теоремы, т. к. устойчивые полиномы соответствуют классу* $(n,0)$ *- эквивалентности, а условия* (1.3) *теоремы будут вытекать из монотонности "вращения"прямоугольника* $\Gamma(\omega)$ *против хода часовой стрелки при изменении* ω *от 0 до* $+\infty$.

З а м е ч а н и е 1.2. *Для проверки принадлежности "угловых"полиномов классу* (n,k) *- эквивалентности достаточно применить метод понижения порядка [4], но для проверки соотношений* (1.3) *необходимо найти все вещественные корни полиномов* $\bar{g}(\omega)$, $\bar{h}(\omega)$, $\underline{g}(\omega)$, $\underline{h}(\omega)$, *тогда как для устойчивых полиномов (теорема Харитонова) это не требуется.*

З а м е ч а н и е 1.3. *Полученный критерий легко можно обобщить на случай, когда коэффициенты интервального полинома будут зависеть от параметров [2], однако, в этом случае проверка условий* (1.3) *станет весьма затруднительной.*

З а м е ч а н и е 1.4. *Можно доказать принадлежность интервального полинома* (1.1) *классу* (n, k) *- эквивалентности, если потребовать принадлежность классу* (n, k) *- эквивалентности 4-х угловых полиномов и линейных политопов, соответствующих ребрам, их соединяющих. Хотя задача становится бесконечномерной, но принадлежность политопов классу* (n, k) *- эквивалентности проверяется с помощью обобщения критерия Найквиста.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ10 − 8 − 00624**.)**

Список литературы

1. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов -”, Труды ИСА РАН, **17 (1)** (2005).
2. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.
3. А.В. Михайлов, “Методы гармонического анализа в теории регулирования”, Автоматика и Телемеханика, **3** (1938), 27-81.
4. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, “Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости”, 2007, 234 с.
5. В.Л. Харитонов, “Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений”, Дифференц. уравнения, **14**, № 11 (1978), 2086-2088.
6. О.В. Мутлу, *Основы управления движением. (Исследование равномерной устойчивости по Ляпунову)*, СПб, 2007, 92 с.
7. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
8. К.Ф. Черных, *Нелинейная упругость (теория и приложения)*, Изд. «Соло», СПб, 2004, 420 с.

The conditions of existing integrals system equations of motion

© A. V. Zubov [4], A. F. Zubova [5], O. A. Pustovalova [6]

Abstract. In giving work is receives analog know theorem Haritonov's on case homogeneous classes of equivalent instability interval polynomials. V.L. Haritonov is installs that for stability interval polynomial necessary and sufficiently that four this angle polynomial was stabilizes. The base result own investigations is contains in that is gives necessary and sufficiently conditions that instability interval polynomial is appears homogeneous, i.e. is consists from polynomials is have equal number roots is lies as in left, so in right half-plane. Is giving conditions several composite, than by V.L. Haritonov, but they is allows so as in case stability polynomials, infinitely measure task is reduces to last measure task.

Key Words: Polynomial, degree, material coefficient, root, class of equivalent, rectangle, radius - vector, integrated plane, parallel axis, hands of a clock

[4] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru