УДК 517.95

Об одном интегро-дифференциальном уравнении фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром

© Т. К. Юлдашев [1] О. В. Новоселов[2]

Аннотация. Изучена однозначная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Сначала модифицирован метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных четвертого порядка. После решения системы алгебраических уравнений путем интнегрирования получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Далее использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: Смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, система алгебраических уравнений, однозначная разрешимость.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория смешанных задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1].

Изучению уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см., напр. [2] – [8]).

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Данная работа является дальнейшим развитием и совершенствованием методики работ [9] – [13].

1. Постановка задачи

Рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times R^+$ интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} - \lambda \int\limits_0^T K(t,s)u(s,x)ds\right) = p(t)\cdot f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty H(s,y)u(s,y)dyds\right) \tag{1.1}$$

со смешанными условиями

$$u_x(0,x) = \varphi_1(x),\ u_x(T,x) = \varphi_2(x),\ u_{xt}(0,x) = \varphi_3(x),\ x \in R^+, \tag{1.2}$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

[2] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

$$u(t,0)=\psi(t),\ t\in\Omega_T, \tag{1.3}$$

где $p(t)\in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma)\in C(R^+\times R)$, $\varphi_k(x)\in C^1(R^+)$, $k=\overline{1,3}$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)b_i(s)$, $0<a_i(t),b_i(s)\in C(\Omega_T)$, $\psi(t)\in C(\Omega_T)$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $R^+\equiv[0,\infty)$, λ – параметр, $0<\int\limits_0^T\int\limits_0^\infty|H(t,x)|dxdt<\infty$.

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи (1.1) – (1.3) для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром.

Под решением смешанной задачи (1.1) – (1.3) понимаем функцию $u(t,x)\in C^{3,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и смешанным условиям (1.2) и (1.3).

2. Сведение задачу (1.1) – (1.3) к интегральному уравнению

В уравнении (1.1) сделаем замену $u_x(t,x)=\vartheta(t,x)$. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^3\vartheta(t,x)}{\partial t^3}-\lambda\int\limits_0^T K(t,s)\vartheta(s,x)ds=p(t)\cdot f(x,\gamma), \tag{2.1}$$

где $\gamma=\int\limits_0^T\int\limits_0^\infty H(s,y)u(s,y)dyds$ – неизвестная константа.

С помощью обозначения

$$c_i(x)=\int\limits_0^T b_i(s)u(s,x)ds \tag{2.2}$$

уравнение (2.1) перепишется в следующем виде

$$\frac{\partial^3\vartheta(t,x)}{\partial t^3}=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\cdot c_i(x)+p(t)\cdot f(x,\gamma). \tag{2.3}$$

Для дифференциального уравнения (2.3) граничные условия (1.2) принимают вид

$$\vartheta(0,x)=\varphi_1(x),\ \vartheta(T,x)=\varphi_2(x),\ \vartheta_t(0,x)=\varphi_3(x),\ x\in R^+. \tag{2.4}$$

Использование обобщенной функции Грина с учетом условий (2.4) в (2.3) дает

$$\vartheta(t,x)=h(t,x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\cdot c_i(x)+q(t)\cdot f(x,\gamma), \tag{2.5}$$

где

$$h(t,x)=\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)\varphi_1(x)+\frac{t^2}{T^2}\varphi_2(x)+\left(t-\frac{t^2}{T^2}\right)\varphi_3(x),$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{sT-ts}{2T^2}(ts+sT-2tT), 0\le s\le t,\\ -\frac{t^2}{2T^2}(T-s)^2, t\le s\le T,\end{cases}$$

$$\mu_i(t)=\int\limits_0^T G(t,s)a_i(s)ds,\ q(t)=\int\limits_0^T G(t,s)p(s)ds.$$

Подставляя (2.5) в (2.2), имеем

$$c_i(x) = \int\limits_0^T b_i(s) \left[h(s,x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \mu_j(s) \cdot c_j(x) + q(s) \cdot f(x,\gamma) \right] ds. \qquad (2.6)$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int\limits_0^T b_i(s) \left[h(s,x) + q(s) \cdot f(x,\gamma) \right] ds. \qquad (2.7)$$

Пусть

$$A_{ij} = \int\limits_0^T b_i(s) \mu_j(s) ds > 0. \qquad (2.8)$$

Тогда из (2.6) получаем относительно $c_i(x)$ следующую систему алгебраических уравнений (САУ)

$$c_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot c_j(x) = B_i(x), \ i = \overline{1,n}. \qquad (2.9)$$

Система алгебраических уравнений (2.9) однозначно разрешима при любых конечных $B_i(x)$, если выполняется следующее условие

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.10)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (2.10) есть многочлен относительно λ степени не выше n. Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более n различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1). Другие значения λ являются регулярными, при которых условие (2.10) выполняется. Для регулярных значений λ система (2.9) имеет единственное решение при любой конечной и ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра λ устанавливается однозначная разрешимость поставленной смешанной задачи (1.1) – (1.3).

Сначала решения САУ (2.9) записываем в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \ i = \overline{1,n}, \qquad (2.11)$$

где

$$\Delta_i(\lambda,x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\lambda, x)$ находятся функции $B_i(x)$. В свою очередь, функции $B_i(x)$ содержат в себя неизвестную функцию $u(t,x)$ в составе функции $f(x,\gamma)$.

В самом деле, эта неизвестная функция находилась в правой части САУ (2.9). Чтобы вывести её из знака определителя выражение в (2.7) запишем в следующем виде

$$B_i(x) = B_{1i}(x) + f(x,\gamma)\cdot B_{2i},$$

где $B_{1i}(x) = \int\limits_0^T h(s,x)\cdot b_i(s)ds$, $B_{2i} = \int\limits_0^T q(s)\cdot b_i(s)ds$.

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda,x) = \Delta_{1i}(\lambda,x) + f(x,\gamma)\cdot\Delta_{2i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{k1} & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{k2} & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{kn} & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix},$$

$k=1,2$, $\Delta_{1i}(\lambda) = \Delta_{1i}(\lambda,x)$, $B_{1i} = B_{1i}(x)$.

Тогда (2.11) приобретает вид

$$c_i(x) = \frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)}{\Delta(\lambda)} + f(x,\gamma)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)},\ i=\overline{1,n}. \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в (2.5) дает

$$u_x(t,x) = \Phi(t,x) + F(t)\cdot f(x,\gamma), \tag{2.13}$$

где

$$\Phi(t,x) = h(t,x) + \lambda\sum_{i=1}^n \mu_i(t)\frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)}{\Delta(\lambda)},\ F(t) = \lambda\sum_{i=1}^n \mu_i(t)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + q(t).$$

Интегрируя по x, из (2.13) получаем

$$u(t,x) = D(t) + \int\limits_0^x \Phi(t,y)dy + F(t)\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy. \tag{2.14}$$

Для определения неизвестного коэффициента $D(t)$ используем начальное условие (1.3). Тогда из (2.14) имеем следующее нелинейное интегральное уравнение

$$u(t,x) = Q(t,x) + F(t)\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy, \tag{2.15}$$

где $Q(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x \Phi(t,y)dy$.

3. Теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3)

Для произвольной функции $l(t,x)\in C^{3,1}(\Omega)$ расматривается следующая норма

$$\big\|l(t,x\big\|_C = \max\Big\{\big|l(t,x)\big| : (t,x)\in\Omega\Big\}.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть:*

1) *Выполняются условия* (2.8) *и* (2.10) *;*
2) $\alpha = \max\left\{\left|Q(t,x)\right| : (t,x) \in \Omega\right\} < \infty$ *;*
3) $M = \max\left\{\left|F(t)\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy\right| : (t,x) \in \Omega\right\} < \infty$ *;*
4) $\left|f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2)\right| \le L(x)\left|\gamma_1 - \gamma_2\right|,\ 0 < L(x) \in C(R^+)$ *;*
5) $\rho = \delta_1\delta_2 < 1$ *,*

где $\delta_1 = \int\limits_0^T\int\limits_0^\infty \left|H(t,x)\right|dxdt < \infty,\ \delta_2 = \max\left\{\left|F(t)\int\limits_0^x L(y)dy\right| : (t,x) \in \Omega\right\} < \infty$.

Тогда в области Ω *существует единственное решение смешанной задачи* (1.1) – (1.3) *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (2.15)

$$u_0(t,x) = 0,\ u_{k+1}(t,x) = Q(t,x) + F(t)\int\limits_0^x f(y,\gamma_k)dy,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

где $\gamma_k = \int\limits_0^T\int\limits_0^\infty H(s,\xi)u_k(s,\xi)d\xi ds$.

В силу условий теоремы, из (3.1) получаем следующие оценки

$$\left\|u_1(t,x) - u_0(t,x)\right\|_C \le \alpha + M, \tag{3.2}$$

$$\left\|u_{k+1}(t,x) - u_k(t,x)\right\|_C \le$$

$$\le \delta_1 \max\left\{\left|F(t)\right|\int\limits_0^x L(y)\cdot\left\|u_k(t,y) - u_{k-1}(t,y)\right\|_C dy\ : (t,x) \in \Omega\right\} \le$$

$$\le \rho\cdot\left\|u_k(t,x) - u_{k-1}(t,x)\right\|_C < \left\|u_k(t,x) - u_{k-1}(t,x)\right\|_C. \tag{3.3}$$

Из оценок (3.2) и (3.3) следует, что оператор в правой части (2.15) является сжимающим. Следовательно, в области Ω смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Заключение

В заключении отметим, что теория интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных в настоящее время является одним из важнейших разделов современной теории уравнений математической физики. Рассмотрено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма в частных производных четвертого порядка, для решения которого не применим метод Фурье разделения переменных. Доказана теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи (1) – (3). Главной особенностью этого уравнения, которая позволяет свести данное уравнение к более простому и удобному для вычисления виду, является то, что ядро вырожденное. Данная работа может быть применена при теоретических исследованиях по интегро-дифференциальным уравнениям математической физики.

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., "Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями", *Известия вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.

3. Джураев Т. Д., Сопуев А., *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*, Фан, Ташкент, 2000, 144 с.

4. Мамедов И. Г., "Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами", *Владикав. мат. журнал*, **12** (2010), 17 – 32.

5. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М., "О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области", *Мат. сборник*, **195**:3 (2004), 115 – 142.

6. Смирнов М. М., *Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка*, ЛГУ, Л., 1972, 123 с.

7. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением", *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

8. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка", *Журн. СВМО*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

9. Юлдашев Т. К., "О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма", *Журн. СВМО*, **15**:3 (2013), 158 – 163.

10. Юлдашев Т. К., "Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка", *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **34**:1 (2014), 56 – 65.

11. Юлдашев Т. К., "Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа", *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **35**:2 (2014), 39 – 49.

12. Юлдашев Т. К., Шабадиков К. Х., "Обратная задача для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма", *Таврическ. вестн. информатики и математики*, **24**:1 (2014), 73 – 81.

13. Юлдашев Т. К., Лоскутова А. Г., "Обратная задача для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма", *Журн. СВМО*, **16**:3 (2014), 87 – 93.

On a fredholm partial integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel

© T. K. Yuldashev[3] O. V. Novoselov[4]

Abstract. It is studying the one value solvability of the mixed value problem for a nonlinear partial Fredholm integro-differential equation of the fourth order with degenerate kernel. First, it is modified to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the fourth order the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations of the second kind. After solving the system of algebraic equations it is obtained by the aid of integration the Volterra integral equation of the second kind. Further it is used the method of successive approximations combined it with the method of compressing maps.

Key Words: Initial value problem, integro-differential equation, Fredholm equation with degenerate kernel, system of algebraic equations, one valued solvability.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

[4] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk