УДК 519.63

Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики

© Р. В. Жалнин[1], А. В. Максимкин[2], В. Ф. Масягин[3], А. И. Пантюшин[4], Е. Е. Пескова[5], В. Д. Сальников[6], В. Ф. Тишкин[7]

Аннотация. В работе предложена неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». Для исследования численного порядка точности предложенного метода выполнены серии расчетов для одномерной задачи о волне, в которой сохраняются энтропия и инвариант Римана.
Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, неявная схема, уравнения газовой динамики.

1. Введение

В настоящее время метод Галеркина с разрывными базисными функциями [1] является одним из широко используемых численных методов, применяемых для решения задач газовой динамики. Но, как известно, при использовании явных схем накладываются жесткие ограничения на шаг дискретизации по времени. Это делает перспективным развитие неявных методик, где ограничение на шаг по времени обусловлено только требуемой точностью. В данной работе предложена неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». Для исследования численного порядка точности предложенного метода выполнены серии расчетов для одномерной задачи о простой волне, сохраняющей энтропию и инвариант Римана [2].

[1] Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@mrsu.ru.

[2] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

[3] Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

[4] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

[5] Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; peskovaee@appmath.mrsu.ru.

[6] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; salnikovvd@appmath.mrsu.ru.

[7] Заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина

Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix},\ F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$E = \epsilon + \frac{u^2}{2},\ p = \rho\epsilon(\gamma - 1).$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, u – скорость, ϵ – удельная внутренняя энергия, γ – показатель аддиабаты. Система (2.1) рассматривается вместе с соответствующими начальными и граничными условиями.

Систему (2.1) будем решать разрывным методом Галеркина на отрезке $[a, b]$. Для этого расмотрим сетку

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \cdots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \cdots < x_{N+1/2} = b$$

с шагом $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

В каждой ячейке $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ приближенное решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде проекции на пространство полиномов степени p в базисе $\{\psi_k(x)\}$:

$$U_h(x,t) = \sum_{k=0}^{p} u_k(t)\psi_k(x). \tag{2.2}$$

Будем рассматривать случаи $p = 1$ и $p = 2$. В качестве базиса выберем систему функций:

$$\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = \frac{x - x_i}{h_i},\ \psi_2(x) = \frac{(x - x_i)^2}{h_i^2},\quad x \in I_i,\quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

где $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$.

Согласно разрывному методу Галеркина получим следующую систему [1]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tfrac{\partial U_h}{\partial t}\psi_l(x)dx - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(U_h)\tfrac{\partial}{\partial x}\psi_l(x)dx + \\ + F_{i+1/2}\psi_l(x_{i+1/2}) - F_{i-1/2}\psi_l(x_{i-1/2}) = 0, i = 1, \ldots, N,\ l = 0, \ldots, p.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $F_{i-1/2}$, $F_{i+1/2}$ – дискретные потоки, которые вычисляются как решения задачи о распаде разрыва [3].

Обозначим $\widetilde{M_i}$ – матрицу, составленную из элементов $m_{kl} = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_k(x)\psi_l(x)dx,\ k, l = 0, \ldots, p$ для каждой ячейки I_i, $i = 1, \ldots, N$. Далее обозначим M_i – блочно-диагональную матрицу

$$M_i = \begin{pmatrix} \widetilde{M_i} & \ldots & 0 \\ \vdots & \widetilde{M_i} & \vdots \\ 0 & \ldots & \widetilde{M_i} \end{pmatrix},$$

и U_i^n – вектор составленный из коэффициентов разложения компонент вектора консервативных переменных U на n-м временном слое в ячейке I_i.

Затем с учетом введенных обозначений запишем неявную схему для (2.4):

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{p}\frac{(u_k)_i^{n+1}-(u_k)_i^n}{\tau}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\psi_k(x)\psi_l(x)dx-\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}F(U_i^{n+1})\tfrac{\partial}{\partial x}\psi_l(x)dx+\\+F_{i+1/2}^{n+1}\psi_l(x_{i+1/2})-F_{i-1/2}^{n+1}\psi_l(x_{i-1/2})=0, i=1,\ldots,N,\ l=0,\ldots,p,\end{gathered}\tag{2.5}$$

или в матричной записи:

$$M\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau}-L(U^{n+1})=0,\tag{2.6}$$

где $U^n=(U_1^n,\,\ldots,\,U_N^n)$.

Представим

$$\begin{gathered}F(U^{n+1})=F(U^n)+\frac{\partial F}{\partial U}\Delta U,\\F_{i+1/2}^{n+1}=F_{i+1/2}^{n}+A^+\Delta U_i+A^-\Delta U_{i+1},\end{gathered}$$

где $\Delta U=U^{n+1}-U^n$, $A^{\pm}=R\Lambda^{\pm}L$, $\Lambda^{\pm}=(\Lambda\pm|\Lambda|)/2$, R,L – матрицы, составленные, соответственно, из правых и левых собственных векторов матрицы $A=\frac{\partial F}{\partial U}$, а Λ – диагональная матрица, составленная из собственных значений A. В результате получим линейную систему, которая в матричной форме запишется следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\tau}M-\frac{\partial L}{\partial U}\right)\Delta U=L(U^n).\tag{2.7}$$

Значение на новом временном слое находится следующим образом:

$$U^{n+1}=\Lambda\Pi_h(\alpha)(U^n+\Delta U),\tag{2.8}$$

где $\Lambda\Pi_h(\alpha)$ – ограничитель Кокбурна ($1\le\alpha\le 2$) [1, 2], который используется для подавления осцилляций вблизи разрывов.

Для решения системы (2.7) использовались решатели GMRES и BoomerAMG из библиотеки HYPRE [5].Более подробно использование данных решателей в рамках данной методики рассмотрено в работе [6].

3. Результаты расчетов

В качестве тестовой задачи для исследования порядка точности метода была выбрана задача с простой волной [2], в которой энтропия p/ρ^γ и инвариант Римана $R^+=u+\frac{2}{\gamma-1}$ являются постоянными.

В начальный момент задаётся плотность:

$$\rho=\begin{cases}1+e^{2-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, |x|<l, x\in[-1,\ 1], l=0.2, \gamma=5/3\\1,\text{ иначе.}\end{cases}\tag{3.1}$$

Остальные параметры определяются согласно условию постоянства энтропии и инварианта Римана:

$$\epsilon=\rho^{\gamma-1},\ u=\frac{-2\sqrt{\epsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}.\tag{3.2}$$

Были выполнены серии расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Значения точного решения, используемые для определеия погрешности, вычислялись аналогично работе [2]. Численные решения были получены описанным выше методом с граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\rho(-1,t)=1,\ u(-1,t)=-\sqrt{10},\ E(-1,t)=6,\\ &\rho(1,t)=1,\ u(1,t)=-\sqrt{10},\ E(1,t)=6. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Погрешность решения оценивалась в следующих нормах:

$$||U_h - U_T||_{L_1} = \int\limits_a^b |U_h - U_T|\, dx,$$

$$||U_h - U_T||_{L_2} = \left(\int\limits_a^b |U_h - U_T|^2\, dx\right)^{1/2},$$

где U_h – вычисленные значения сеточной функции, U_T – точные значения искомого решения.

В таблицах 1 – 8 представлены погрешности и порядки точности полученных результатов. При решении системы (2.7) относительная погрешность нахождения решения задавалась равной 10^{-4}.

По результатам расчетов можно сделать вывод, что предложенная схема состоятельна и показывает удовлетворительные результаты. При ослаблении параметров ограничителя ($\alpha = 2$) получается порядок точности выше первого. Тот факт, что не достигается, казалось бы, ожидаемый порядок точности (второй или выше) можно объяснить влиянием ограничителя Кокбурна, о чем подробно говорится в работе [2]. Это позволяет говорить о возможности повышения порядка точности методики за счет использования ограничителей, которые уменьшают порядок точности в меньшей степени, что является заделом для дальнейшего исследования.

Используемые методы решения системы линейных алгебраических уравнений не оказывают заметного влияния на порядок точности, но метод GMRES демонстрирует минимальное преимущество перед алгебраическим многосеточным методом (AMG). При этом, следует заметить, что использование BoomerAMG требовало в среднем в 1.5 раза меньшее количество итераций при решении системы (2.7) (для GMRES размерность пространства Крылова задаволась равной 20; для BoomerAMG допустимая глубина вложенных сеток задавалась равной 20).

Таблица 1: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 1.5$, GMRES)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	7.051978E-002	-	1.219065E-001	-
100	3.789902E-002	0.8959	7.689797E-002	0.6648
200	2.005818E-002	0.9180	4.602746E-002	0.7405
400	1.053435E-002	0.9291	2.663442E-002	0.7893

Таблица 2: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 2.0$, GMRES)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	5.684439E-002	-	1.062554E-001	-
100	2.647765E-002	1.1022	5.847784E-002	8.6157
200	1.085581E-002	1.2863	2.733743E-002	1.0970
400	4.137819E-003	1.3915	1.151226E-002	1.2477

Таблица 3: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 1.5$, BoomerAMG)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	7.051859E-002	-	1.218947E-001	-
100	3.790927E-002	0.8955	7.690993E-002	0.6644
200	2.006011E-002	0.9182	4.603179E-002	0.7405
400	1.053347E-002	0.9293	2.663405E-002	0.7894

Таблица 4: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 2.0$, BoomerAMG)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	5.681484E-002	-	1.062139E-001	-
100	2.643151E-002	1.1040	5.842460E-002	0.8623
200	1.084692E-002	1.2850	2.731513E-002	1.0969
400	4.162216E-003	1.3819	1.151728E-002	1.2459

Таблица 5: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 1.5$, GMRES)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	8.177310E-002	-	1.347056E-001	-
100	4.486013E-002	0.8662	8.702407E-002	0.6303
200	2.430233E-002	0.8843	5.349442E-002	0.7020
400	1.293719E-002	0.9096	3.161057E-002	0.7590

Таблица 6: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 2.0$, GMRES)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	6.638527E-002	-	1.166230E-001	-
100	3.105487E-002	1.0960	6.545680E-002	0.8332
200	1.321185E-002	1.2330	3.167177E-002	1.0473
400	4.934820E-003	1.4208	1.340976E-002	1.2399

Таблица 7: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 1.5$, BoomerAMG)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	8.181598E-002	-	1.347550E-001	-
100	4.493047E-002	0.8647	8.711857E-002	0.6293
200	2.438070E-002	0.8820	5.363114E-002	0.6999
400	1.302655E-002	0.9043	3.177319E-002	0.7553

Таблица 8: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 2.0$, BoomerAMG)

N	$\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$	$\|\|\cdot\|\|_{L_2}$	Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_2}$
50	6.641629E-002	-	1.166640E-001	-
100	3.110548E-002	1.0944	6.558310E-002	0.8310
200	1.327554E-002	1.2284	3.184349E-002	1.0423
400	5.016678E-003	1.4040	1.361815E-002	1.2255

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

Список литературы

1. Bernardo Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations”, *Lecture Notes in Mathematics*, **1697** (1998), 151 – 268.

2. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., “Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2012, № 34, 31 с., URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34.

3. Годунов С. К., “Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики”, *Матем. сб.*, **47(89)**:3 (1959), 271 – 306.

4. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Сальников В. Д., Пескова Е. Е., “Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода галеркина с разрывными базисными функциями”, *Аналитические и численные методы моделирования естетвенно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн.*

конф. (Россия, г. Пенза, 28–31 октября 2014 г.), Изд-во ПГУ, Пенза, 2014, 100 – 104, 276 с.

5. E. Chow, A.J. Cleary, and R.D. Falgout, "Design of the hypre Preconditioner Library", *Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing* (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998), SIAM, Philadelphia, PA, 1998, 100 – 104, 276 pp.

6. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., "Исследование влияния решателей систем линейных алгебраических уравнений на точность решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина с неявной дискретизацией по времени.", *Препринт Средне-Волжского математического общества*, 2014, № 126, 8 с.

Research of the order of accuracy of an Implicit Discontinuous Galerkin method for solving problems of gas dynamics

© R. V. Zhalnin[8], A. V. Maksimkin[9], V. F. Masyagin[10], A. I. Pantyushin[11], E. E. Peskova[12], V. D. Salnikov[13], V. F. Tishkin[14]

Abstract. In this paper we propose a method for implicit discontinuous Galerkin method, based on the idea of difference equations in the form named "delta-form". We perform a series of calculations for one-dimensional problem of the wave which conserves the entropy and Riemann invariant to study the numerical order of accuracy of the proposed method.

Key Words: DG, implicit schemes, gas dynamic equations.

[8] Head of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@mrsu.ru.

[9] Postgraduate student of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

[10] Assistant of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

[11] Postgraduate student of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

[12] Postgraduate student of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; peskovaee@appmath.mrsu.ru.

[13] Postgraduate student of the Deparment of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; salnikovvd@appmath.mrsu.ru.

[14] Deputy director, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.