

УДК 534.113

Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости

© Г. Ф. Сафина¹

Аннотация. При различных закреплениях участка трубопровода с жидкостью исследованы зависимости частот его изгибных колебаний от параметров жидкости. Показано, что при увеличении плотности, давления жидкости, а также скорости потока жидкости частоты колебаний участка трубы уменьшаются. Приведены примеры, таблицы, построены графики зависимостей, частотные годографы при различных видах закреплений участка трубы.

Ключевые слова: трубопровод с жидкостью, частоты колебаний, зависимости, характеристики жидкости, плотность, давление, скорость, частотные годографы

1. Введение

Колебания трубопровода с жидкостью изучались во многих работах (см., например, [1]–[6]). Так, в [1] по методу Бубнова-Галеркина были найдены первые два собственных значения для краевой задачи с уравнением (2.1) и краевыми условиями $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ на концах трубы. В работе [2] в случае, когда не учитывается внутреннее давление ($p_0 = 0$), исследована зависимость тонов колебаний от скорости при граничных условиях защемления по концам трубы и шарнирных ее опираниях. В отличие от этой работы, в настоящей работе исследовано влияние скорости потока жидкости на частоты колебаний участка трубы между ее закреплениями не только при заделке и шарнирном опирании, но и при других, в том числе и упругих, видах закреплений. Кроме того, учтено внутреннее давление жидкости (случай $p_0 \neq 0$). Построены также частотные годографы при различных видах закреплений участка трубы.

2. Прямая задача об изгибных колебаниях участка трубы с жидкостью

Уравнение малых свободных колебаний трубы с протекающей жидкостью имеет вид [1]–[3]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \tilde{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\tilde{m}V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \tilde{m} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho, \quad \tilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и \tilde{m} — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости.

¹ Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

Напомним необходимый для дальнейшего изложения способ получения собственных частот [6].

После введения безразмерных переменных $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{w} = w/r$, $\tilde{t} = t/\tau$, где $\tau = l^2(m+\tilde{m})^{1/2}/EI$, и выражения прогиба к задаче в виде $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x})e^{i\omega\tilde{t}}$, уравнение (2.1) примет вид обыкновенного линейного дифференциального уравнения 4 порядка с постоянными коэффициентами:

$$X^{(4)} + aX'' + 2bi\omega X' - \omega^2 X = 0, \quad (2.2)$$

в котором

$$a = \frac{\tilde{m}l^2}{EI} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right); \quad b = \frac{\tilde{m}V_0l}{(EI(m+\tilde{m}))^{1/2}}.$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.2) являются функции

$$X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = e^{\lambda_j \tilde{x}}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.3)$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — корни соответствующего характеристического уравнения, которые мы будем считать различными.

В общем случае, который учитывает заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку, различные виды упругого закрепления трубопровода, краевые условия как известно [5] представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_1(X) = a_1X(0) + a_4X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = a_2X'(0) + a_3X''(0) = 0, \\ U_3(X) = b_1X(1) + b_4X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = b_2X'(1) + b_3X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение частот получается из условия равенства нулю характеристического определителя $\Delta(\omega_k)$. При известных параметрах системы (труба — жидкость) и краевых условиях собственные частоты колебаний трубопровода находятся как корни уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$.

3. Влияние на собственные частоты колебаний участка трубопровода плотности и давления жидкости

Исследуем влияние на значения собственных частот колебаний трубы таких параметров жидкости, как давление, скорость и плотность.

Рассмотрим вначале зависимость значений собственных частот колебаний трубы от изменения внутреннего давления в трубопроводе при условии не протекания жидкости (т.е. при $V_0 = 0$). В этом случае в дифференциальном уравнении (2.2) коэффициент $b = 0$. Зададим следующие параметры системы (труба - жидкость):

$$\begin{aligned} r_1 = 0.0095 \text{ м}, \quad r = 0.01 \text{ м}, \quad l = 5 \text{ м}, \quad \rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E = 6.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь в качестве материала трубы рассматривается металлопластик, а в качестве жидкости — вода. Определим максимальное значение внутреннего давления p_0 , которое может привести к разрыву трубы. Это значение определяется формулой [4]

$$p_{\max} = \sigma(r - r_1)/r. \quad (3.2)$$

Для принятых выше параметров $r - r_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\sigma = 1800 \cdot 10^5$ Н/м² значение максимально допустимого давления равно $p_{\max} = 90 \cdot 10^5$ Н/м².

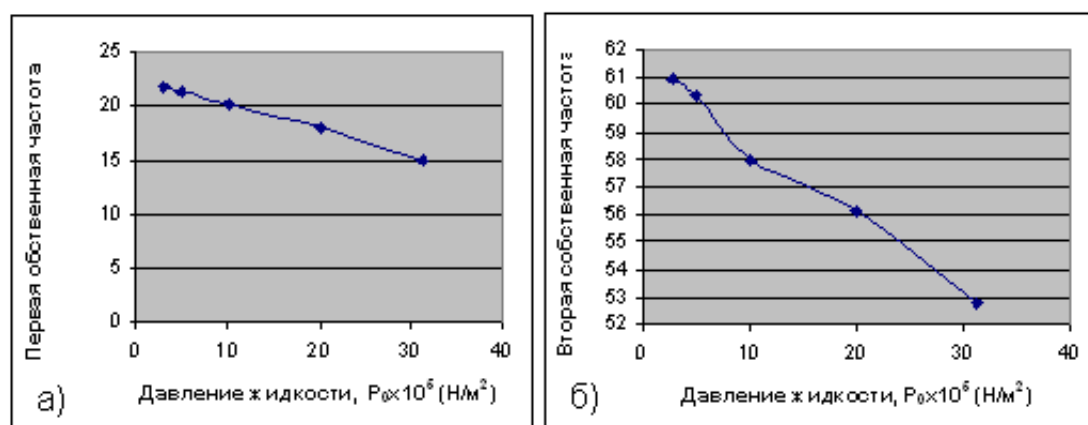
Поставим к уравнению (2.2) краевые условия в виде

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) - X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) + X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эти краевые условия означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями, равными единице. Будем вычислять значения собственных частот колебаний трубы с жидкостью, меняя давление p_0 , которое оказывает жидкость на стенки трубы, оставляя остальные параметры системы неизменными. Как изменятся при этом собственные частоты колебаний трубы?

Результаты решений уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$ при параметрах системы (3.1) и краевых условиях (3.3) рассмотрим на диаграммах и таблицах.

На рисунке 1 (а) дана зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от внутреннего давления жидкости. Видно, что с увеличением давления, первая собственная частота ω_1 уменьшается. На рисунке 1 (б) подобная зависимость рассмотрена для второй собственной частоты колебаний трубопровода.



Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот колебаний от давления жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Такое изменение касается не только первых двух собственных частот, но и всего спектра частот колебаний трубы с жидкостью. В таблице 1 приведены значения пяти собственных частот колебаний трубы, соответствующие увеличивающимся значениям внутреннего давления жидкости в трубе для рассматриваемой выше задачи.

Таблица 4: Зависимость собственных частот колебаний трубы от давления жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	$\omega_5, \text{с}^{-1}$
$p_0 = 2.9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21.82	60.92	120.08	199.00	297.67
$p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21.39	60.35	119.46	198.35	297.00
$p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	20.35	58.00	118.00	198.83	295.44
$p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	18.04	56.14	114.99	193.71	292.25
$p_0 = 31.3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	15.03	52.78	111.53	190.18	288.66

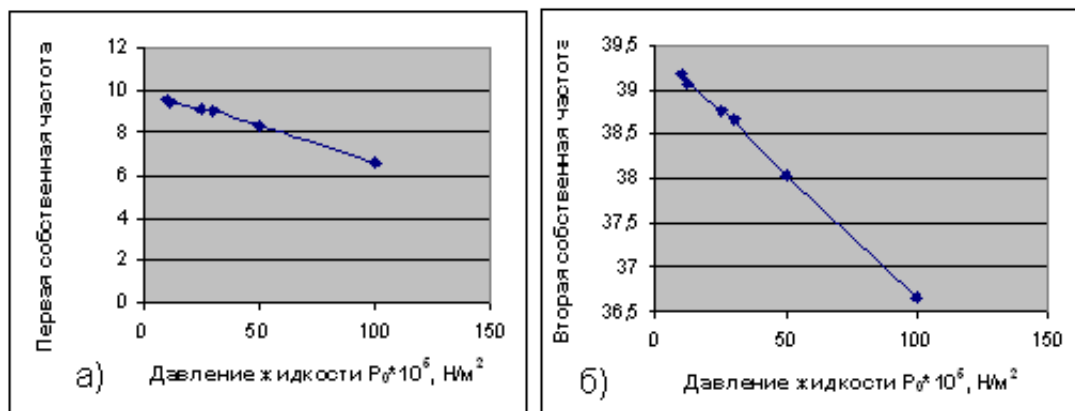
Установлено, что подобная зависимость собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости справедлива при любых параметрах системы (труба-жидкость). Кроме того, увеличение внутреннего давления жидкости ведет к уменьшению спектра частот колебаний трубы не только при упругих закреплениях трубы, но и при других видах закреплений (свободных опорах, плавающих заделках и т. п.). На рисунке 2 (а, б), например, показаны зависимости первой и второй собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости при шарнирных опорах трубы

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

и при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 = 0.01 \text{ м}, \quad r = 1.08 r_1, \quad l = 1 \text{ м}, \quad \rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

системы (труба-жидкость). Параметры (3.5) определяют в качестве материала трубы — сталь, в качестве жидкости — воду. Максимальное значение давления, которое может привести к разрыву трубы равно $p_{\max} = 422 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ (при $r - r_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$).



Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот от давления жидкости для задачи (2.2), (3.4) при параметрах (3.5) системы (труба-жидкость)

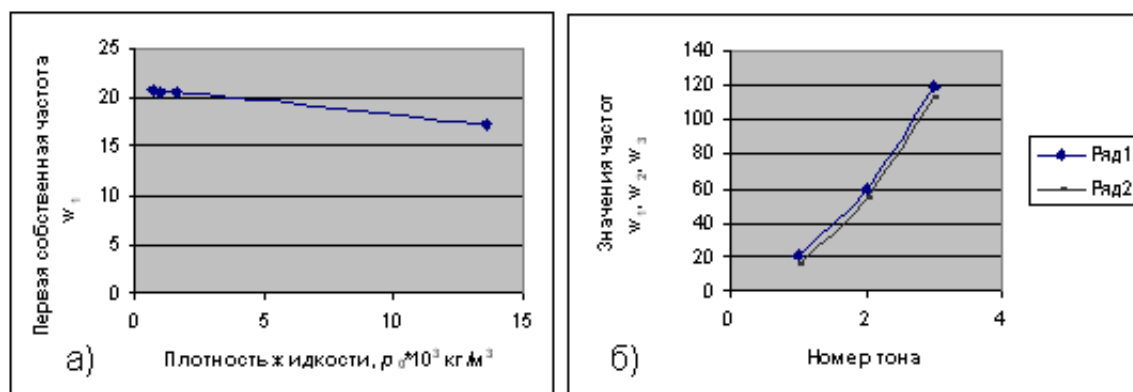
Заметим также, что обратная зависимость значений собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления справедлива и в случае протекания жидкости по трубе.

Исследуем теперь влияние на спектр частот колебаний трубы плотности жидкости. Рассмотрим задачу (2.2), (3.3) при следующих параметрах системы

$$\begin{aligned} r_1 = 0.0095 \text{ м}, \quad r = 0.01 \text{ м}, \quad l = 5 \text{ м}, \quad \rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 = 5 \text{ м/с}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad p_0 = 1.78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Будем вычислять собственные значения частот колебаний при увеличении плотности жидкости и неизменных значениях остальных параметров системы. Результаты, полученные по решениям прямых задач, продемонстрируем снова на графиках и таблицах. Для указанной выше задачи на рисунке 4 (а) показан график зависимости значений первой собственной частоты ω_1 колебаний трубопровода от различных значений ρ_0 плотности жидкости.

По графику видно, что при увеличении плотности жидкости первая собственная частота колебаний трубопровода уменьшается. Вычисления показывают, что увеличение плотности жидкости ведет к уменьшению не только первой собственной частоты колебаний трубопровода, но и всех значений из спектра частот его колебаний.



Зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от плотности жидкости (а) и изменение значений первых трех тонов колебаний трубы при различных значениях плотности жидкости (б)

На рисунке 4 (б), например, рассмотрен график изменения значений первых трех собственных частот колебаний трубы в зависимости от плотности потока жидкости. Здесь ряду 1 соответствуют значения первых трех частот при $\rho_0 = 0.71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, ряду 2 — при $\rho_0 = 13.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Таким образом, получаем, что увеличение как давления, так и плотности жидкости ведут к уменьшению значений частот колебаний участка трубопровода.

4. Зависимость частот колебаний участка трубопровода от скорости потока жидкости

Исследуем теперь зависимость частот колебаний участка трубы от скорости потока жидкости.

Рассмотрим задачу с уравнением (2.2) и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) - 3X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) + 3X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

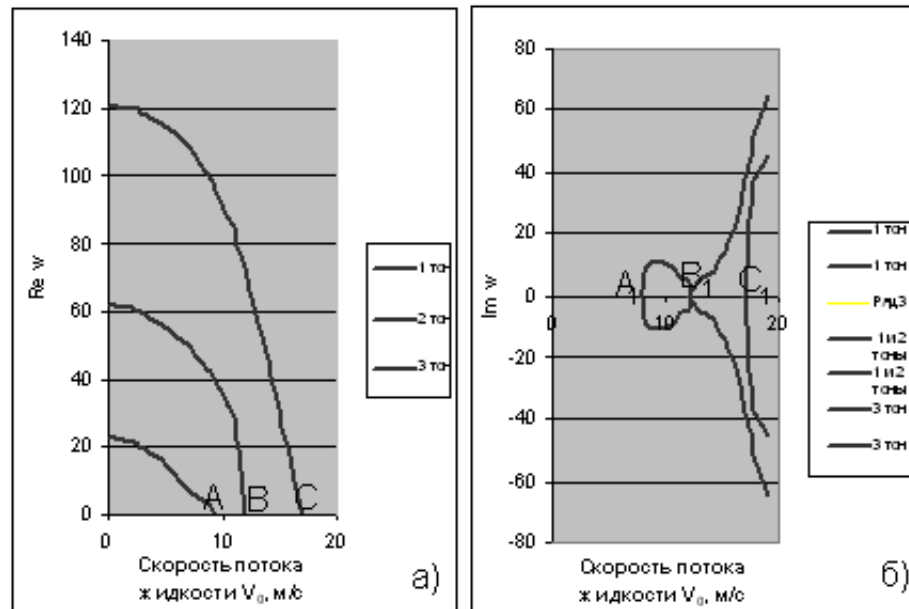
которые означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными трем. Пусть имеются параметры (3.5) системы при давлении жидкости $p_0 = 170 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Рассмотрим влияние скорости потока жидкости на собственные формы колебаний трубы при неизменных значениях остальных параметров системы. Исследования показывают, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот изгибных колебаний трубы.

Известно [2], что если «для какой-либо собственной частоты, мнимая часть равна нулю, и одновременно действительная часть равна нулю, то это отвечает порогу дивергенции, т.е. наличию статической потери устойчивости». Исследуя изменения действительной и

мнимой частей собственных частот ω_j можно также установить порог флаттера для данной упругой системы.

На рисунке 3 представлены значения $Re \omega_j$ и $Im \omega_j$ для первых трех тонов колебаний системы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.1) при параметрах системы (3.1) и внутреннем давлении жидкости $p_0 = 0.5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$. На оси ординат рисунка 3 (а) отложены значения $Re \omega_j$ системы (труба-жидкость) при упругих закреплениях (4.1) в отсутствии течения жидкости $\omega_1 = 21.203$, $\omega_2 = 61.502$, $\omega_3 = 120.729$.



Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.1) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Остановимся на частотных годографах рисунка 3 подробнее. Видим, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот. При достижении значения скорости $V_0 = 9.4 \text{ м/с}$ находим, что $Re \omega_1 = 0$ (точка A), кроме того по рисунку 3 (б) значение $Im \omega_1 = 0$ (точка A_1). Таким образом, мы имеем порог дивергенции для первой формы колебаний ω_1 , (точки A и A_1). При дальнейшем возрастании скорости потока жидкости можно отметить на оси абсцисс точки, отвечающие порогу дивергенции для второй формы (точки B и B_1) и третьей формы (C и C_1) колебаний трубы.

Дальнейшее же увеличение скорости потока за точкой B приводит к флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний. Таким образом, здесь мы имеем классический флаттер для рассматриваемой задачи при увеличении скорости потока жидкости. Собственные частоты ω_j становятся комплексно сопряженными, что и отражено на рисунке 3 (б).

Если, как и в работе [2], рассматривать безразмерную скорость u (считая при этом внутреннее давление p_0 жидкости равным нулю), то для трубы с защемленными концами и на свободных опорах получаются те же результаты, что и в указанной работе. А именно, для трубы с защемленными концами порог дивергенции для первого тона колебаний отвечает значению $u = 2\pi$, а порог флаттера соответствует величине u , чуть меньшей 3π . Причем при отсутствии течения жидкости имеем $\omega_1 = 22.373$, $\omega_2 = 61.673$,

$\omega_3 = 120.903$, что отвечает квадратам соответствующих собственных значений задачи для балки с защемленными концами [5].

Для трубы же как балки с шарнирно опертыми концами порог дивергенции отвечает значениям $u = \pi j$, где $j = 1, 2, 3$ и т.д., а порог флаттера соответствует величине u , несколько превышающей 2π .

Обратные зависимости значений собственных частот колебаний трубы с жидкостью при упругих закреплениях аналогичны подобной зависимости при защемлениях и шарнирных опорах указанной выше работы с разницей в значениях порогов дивергенций и флаттера. Например, для задачи (2.2), (4.1) при параметрах (3.1) системы имеем: порог дивергенции для первой формы колебаний соответствует величине u , чуть большей 2π , а порог флаттера соответствует u , несколько превышающей 3π .

Аналогичные результаты получены в исследованиях спектра частот колебаний трубопровода при упругих закреплениях трубы пружинами с другими относительными жесткостями на изгиб.

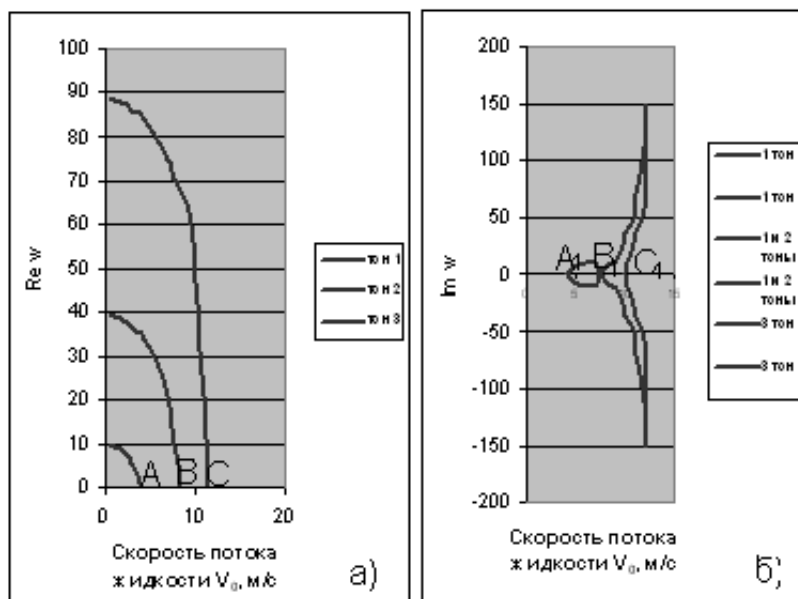
Проведенные вычисления позволяют сделать вывод о том, что при различных видах упругих закреплений пороги дивергенции отвечают следующим значениям u безразмерной скорости: $2\pi < u < 3\pi$ — порог дивергенции для первой собственной частоты, $3\pi < u < 4\pi$ — для второй собственной частоты, $4\pi < u < 5\pi$ — для третьей собственной частоты и т.д.; порог флаттера соответствует значению u , несколько превышающей 3π .

Проведены также исследования по влиянию скорости потока жидкости на спектр частот колебаний трубы при таких закреплениях, как свободные опоры, заделки. Получено, что и при этих видах закреплений увеличение скорости потока жидкости ведет к уменьшению значений форм колебаний трубы. Например, на рисунке 4 (а, б) приведены частотные годографы для трубы со свободными концами

$$\begin{aligned} U_1(X) = X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость).

Здесь точками A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 отмечены пороги дивергенции соответственно для первой, второй, третьей форм колебаний. Этим же порогам отвечают соответственно следующие значения скорости потока жидкости $V_0 = 4.1\text{м/с}$, $V_0 = 7.5\text{м/с}$, $V_0 = 11.3\text{м/с}$. Флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний отвечает скорость $V_0 = 7.5\text{м/с}$.



Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.2) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Если же увеличивать одновременно скорость потока жидкости и плотность, то темп падения частот колебаний будет резче. Например, для задачи (2.2), (3.3) при параметрах системы (3.6) будем увеличивать не только плотность жидкости, но и ее скорость. Результаты вычислений прямых задач представлены в таблице 2.

Таблица 5: Зависимость собственных частот колебаний трубы от скорости и плотности потока жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.6) системы (труба-жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3
$\rho_0 = 0.71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 1 \text{ м/с}$	20.92	59.94	119.05
$\rho_0 = 1.59 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 10 \text{ м/с}$	18.82	57.56	116.89

Таким образом, увеличение скорости потока жидкости при любых закреплениях концов трубопровода ведет к уменьшению собственных частот его изгибных колебаний.

5. Заключение

В работе исследовано влияние характеристик жидкости на частоты изгибных колебаний участка трубопровода. Установлено, что при любых закреплениях трубопровода увеличение таких параметров жидкости, как давление, скорость потока жидкости, плотность жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот колебаний.

Исследования проведены при различных видах закреплений участка трубопровода, в том числе и свободных опорах, заделках, различных видах упругих закреплений. Приведены таблицы и графики указанных зависимостей, а также частотные годографы, подтверждающие результаты исследований.

Таким образом, установлено, как на значения собственных частот колебаний участка трубы с жидкостью влияют меняющиеся характеристики потока жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.
2. Вольмир А. С., *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости*, Наука, М., 1979.
3. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.
4. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р., *Сопротивление материалов*, Наука, М., 1986.
5. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко*, Машиностроение, М., 1968.
6. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49 №1** (2008), 139–147.

Research of dependences of frequencies of fluctuations pipeline site from characteristics liquids

© G F. Safina²

Abstract. At various fixing pipeline site with liquid dependences are investigated frequencies of its flexural fluctuations from liquid parameters. It is shown, that at increase in density, liquid pressure, and also speeds of a stream of liquid of frequency of fluctuations site of a pipe decrease. Examples, tables are given, schedules of dependences, frequency godograf are constructed at different types fixing of a site of a pipe.

Key Words: the pipeline with liquid, frequencies of fluctuations, dependences, liquid characteristics, density, pressure, speed, frequency godograf

² Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru