

УДК 519.63:517.958

Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями

© А. Р. Нафикова¹, В. Н. Кризский²

Аннотация. В работе построена математическая модель диффузии-адвекции радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм расчета поля объемной активности радона.

Ключевые слова: диффузия-адвекция радона, анизотропная среда, краевая задача, метод интегральных преобразований и интегральных представлений, преобразование Лапласа

1. Введение

Радон, в силу своих специфических особенностей, является индикатором при различных геологических и геотехнических исследованиях. Динамические изменения концентрации радона в приповерхностном слое почвы отражают динамические изменения напряженно-деформированного состояния горного массива, что служит основой для исследования вариаций поля радона как краткосрочного предвестника сейсмических событий [1]. В геологии изотопы радона используются для поиска урановых и ториевых руд, для экологического картирования при выборе площадок под строительство промышленных и жилых сооружений. Повышенная концентрация радона над залежами углеводородов используется для поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений.

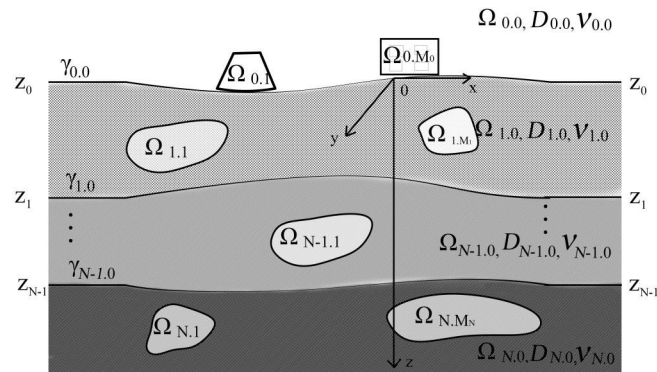
Изучение процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка алгоритмов решения подобного типа задач и расчета полей объемной активности радона имеет практическое значение в таких направлениях, как сейсмология, геохимия, разведочная геофизика и т.д.

2. Постановка задачи и способ решения

Будем рассматривать горизонтально-слоистую модель среды с локальными включениями, отражающую типовую структуру нефтеносного района (см. рисунок).

¹ Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

² Зам. директора по научной работе и инновациям, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.



Горизонтально-слоистая среда с включениями

Пусть среда разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$ ($i = \overline{0, N}$) на горизонтальные слои $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которого описываются симметричными тензорами $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i,0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i,j}$ ($j = \overline{1, M_i}$) с границами $\gamma_{i,j}$, заполненных веществом, физические свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{i,j}$, $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{1, M_i}$.

Математическая модель переноса радона в области исследования $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=1}^{M_i} \Omega_{i,j} \subset \mathbb{R}^3$ может быть представлена начально-краевой задачей вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i,j}(P, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,j} \nabla A_{i,j}(P, t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P, t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P, t) - A_{i,\infty}), \\ P &= P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \\ ((D_{i,0} \nabla A_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \nabla A_{i+1,0}(P, t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ A_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \nabla A_{i,j}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P, t))|_{\gamma_{i,j}} &= ((D_{i,0} \nabla A_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i,0} A_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ A_{i,j}(P, t)|_{\gamma_{i,j}} &= A_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P, t) &= A_{N,\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P, t) = 0; \\ \lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P, t) &= A_i(P, t), i = \overline{0, N}; \\ A_{i,j}(P, 0) &= 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $A_{i,j}(P, t)$ – объемная активность радона в грунте; λ – постоянная распада радона; $A_{i,\infty}$ – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) в грунте i -го слоя, которая равна $A_{i,\infty} = K_{i.em}A_{i.Ra}\rho_{i.s}(1 - \eta_i)$, $K_{i.em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i.Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra , $\rho_{i.s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_i(P, t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

Если область $\Omega_{0,0}$ – приземный слой атмосферы, то в задаче (2.1) следует положить $A_{0,\infty} = 0$. При $M_0 > 0$ включения $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$ могут описывать жилые и производственные сооружения.

Представим искомую функцию объемной активности радона в грунте $A_{i,j}(P, t)$ в виде суммы двух вспомогательных функций нормального $A_i(P, t)$ и аномального $\bar{A}_{i,j}(P, t)$ полей, т.е.

$$A_{i,j}(P, t) = A_i(P, t) + \bar{A}_{i,j}(P, t), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}, \quad (2.2)$$

где нормальное поле радона определяется краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i(P, t)}{\partial t} &= \text{div}(D_{i,0}\bar{\nabla}A_i(P, t)) + \nu_{i,0}\frac{\partial A_i(P, t)}{\partial z} - \lambda(A_i(P, t) - A_{i,\infty}), \\ P &\in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N}; \\ ((D_{i,0}\bar{\nabla}A_i(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0}A_i(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= \\ ((D_{i+1,0}\bar{\nabla}A_{i+1}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0}A_{i+1}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; & \\ A_i(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} A_N(P, t) &= A_\infty^N; \lim_{z \rightarrow -\infty} A_0(P, t) = 0; \\ \lim_{P \in \Omega_i, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_i(P, t) &= \widetilde{A}_i(z, t), i = \overline{0, N}; A_i(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\widetilde{A}_i(z, t)$ – объемная активность радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами $z = z_i, i = \overline{0, N-1}$ и коэффициентами диффузии $\widetilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$. Способ определения $\widetilde{A}_i(z, t)$ описан в [2].

С учетом задачи (2.3) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P, t)}{\partial t} &= \text{div}(D_{i,j}\bar{\nabla}\bar{A}_{i,j}(P, t)) + \nu_{i,j}\frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P, t)}{\partial z} - \lambda\bar{A}_{i,j}(P, t), \\ P &\in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \\ ((D_{i,0}\bar{\nabla}\bar{A}_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0}\bar{A}_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= ((D_{i+1,0}\bar{\nabla}\bar{A}_{i+1,0}(P, t), \bar{n}) + \\ + \nu_{i+1,0}\bar{A}_{i+1,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; & \\ \bar{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= \bar{A}_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j}\bar{\nabla}\bar{A}_{i,j}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,j}\bar{A}_{i,j}(P, t))|_{\gamma_{i,j}} &= [(D_{i,0}\bar{\nabla}\bar{A}_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \\ + \nu_{i,0}\bar{A}_{i,0}(P, t) + \psi_{i,0}(P, t)]|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}, & \\ \psi_{i,0}(P, t) &= ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}A_i(P, t), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j})A_i(P, t); \quad (*) \\ \bar{A}_{i,j}(P, t)|_{\gamma_{i,j}} &= \bar{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ \lim_{P \rightarrow \infty} \bar{A}_{i,0}(P, t) &= 0, i = \overline{0, N}; \bar{A}_{i,j}(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сделаем в задаче (2.4) замену вида:

$$\bar{A}_{i,j}(P, t) = e^{-\lambda t} u_{i,j}(P', t), \quad (2.5)$$

где $P' = (x, y, z')$, $z' = z + \nu_{i,j}t$.

Получим задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}(P', t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} u_{i,j}(P', t)), P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} u_{i,0}(P', t), \bar{n}) + \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} u_{i+1,0}(P', t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i+1,0} u_{i+1,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \bar{\nabla} u_{i,j}(P', t), \bar{n}) + \nu_{i,j} u_{i,j}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}} &= ((D_{i,0} \bar{\nabla} u_{i,0}(P', t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t) + \psi_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ u_{i,j}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}} &= u_{i,0}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} u_{i,0}(P', t) &= 0, i = \overline{0, N}; \\ u_{i,j}(P', 0) &= 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Применим к задаче (2.6) способ решения, описанный в работе [3], используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P', s) = \int_0^{\infty} u(P', t) e^{-st} dt \quad (2.7)$$

с формулой обращения

$$u(P', t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(P', s) e^{st} ds. \quad (2.8)$$

Получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s)) - s F_{i,j}(P', s) &= 0, P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} F_{i+1,0}(P', s), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i+1,0} F_{i+1,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,0}} &= F_{i+1,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,j} F_{i,j}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}} &= ((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s) + F_{\psi_{i,0}}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}, \\ F_{\psi_{i,0}}(P') &= ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} F_i(P', s), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) F_i(P', s); \\ F_{i,j}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}} &= F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} F_{i,j}(P', s) &= 0, i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функции $F_{\psi_{i,0}}(P')$ и $F_i(P', s)$ – есть образы функций $\psi_{i,0}(P', t)$ и $A_i(P', t)$ при преобразовании (2.7) соответственно.

Для решения задачи (2.9) рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина $G(P, Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q, y_q, z_q)$

и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D_{i,0}\bar{\nabla}G_{i,0}(P',Q)) - sG_{i,0}(P',Q) &= -\delta(P',Q), P' \in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N}; \\ ((D_{i,0}\bar{\nabla}G_{i,0}(P',Q), \bar{n}) + \nu_{i,0}G_{i,0}(P',Q))|_{\gamma'_{i,0}} &= ((D_{i+1,0}\bar{\nabla}G_{i+1,0}(P',Q), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i+1,0}G_{i+1,0}(P',Q))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ G_{i,0}(P',Q)|_{\gamma'_{i,0}} &= G_{i+1,0}(P',Q)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i,j}(P',Q) &= 0, i = \overline{0, N}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Согласно [3], интегральное представление задачи (2.9) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F(P',s) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q,s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P',Q) + \\ &+ ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}G_{i,0}(P',Q), \bar{n}_Q)] d\gamma_{i,jQ} + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q)G_{i,0}(P',Q) d\gamma_{i,jQ}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь \bar{n}_Q – вектор внешней нормали к границе включения в точке Q , а граничные значения функции $F_{i,j}(Q,s)$ находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, формируемых из (2.9) при $P' \in \gamma_{i,j}$:

$$\begin{aligned} F_{i,j}(P',s) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q,s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P',Q) + \\ + ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}G_{i,0}(P',Q), \bar{n}_Q)] d\gamma_{i,jQ} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q)G_{i,0}(P',Q) d\gamma_{i,jQ}, P' \in \gamma_{i,j}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким образом, алгоритм решения исходной задачи (2.1) имеет вид:

Шаг 1. Определяем нормальное поле радона $\tilde{A}_i(z,t)$ в горизонтально-слоистой кусочно-однородной среде с плоско-параллельными границами $z = z_i = \text{const}, i = \overline{0, N-1}$, коэффициентами диффузии $d_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$ и скоростями адвекции $\nu_{i,0}, i = \overline{0, N}$ по алгоритму, описанному в работе [2].

Шаг 2. Если границы слоев $z = \gamma_{i,0}(x,y) = z_i = \text{const}$, то есть среда имеет плоско-параллельные границы, то решение задачи (2.3) для нормального поля радона найдено: $A_i(P,t) = \tilde{A}_i(z,t)$. Иначе следует решить задачу (2.3), например, методом интегральных уравнений, формируя их по участкам $\gamma_{i,0}(x,y) \neq z_i$.

Шаг 3. Вычисляем функции $\psi_{i,0}(P',t)$ на границах включений $\gamma_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ по формуле (*).

Шаг 4. Для каждого из значений параметра s множества квадратурных узлов численного обращения преобразования Лапласа (в соответствии с алгоритмом в [4]) по формуле (2.8):

Шаг 4.1. Находим образы $F_{\psi_{i,0}}(P')$ функций $\psi_{i,0}(P,t)$ при преобразованиях (2.5) и (2.7).

Шаг 4.2. Находим решение задачи (2.10) для функции Грина. Оно может быть получено аналитически для случая однородных слоев с плоско-параллельными границами с помощью интегрального преобразования Ханкеля-Вебера.

Шаг 4.3. Формируем систему (2.12) и находим ее решение - граничные значения функции $F_{i,j}(Q, s)$.

Шаг 4.4. По формуле (2.11) определяем решение задачи (2.9) - функцию $F_{i,j}(P', s)$.

Шаг 4.5. Формируем слагаемое квадратурной формулы для интеграла (2.8), вычисляя функции $u(P', t)$.

Шаг 5. Находим аномальное поле $\bar{A}_{i,j}(P, t)$ по формуле (2.5).

Шаг 6. Решение исходной задачи (2.1) - функцию $A_{i,j}(P, t)$ - получаем по формуле (2.2).

3. Заключение

Построена математическая модель диффузии-адвекции радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм расчета поля объемной активности радона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин В. И., "Газовое дыхание Земли", *Соросовский образовательный журнал*, 1997, № 1, 57–64.
2. Яковлева В. С., Паровик Р. И., "Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1(2), 45–55.
3. Кризский В. Н., "О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля", *Вестник Башкирского университета*, **14:4** (2009), 1302–1306.
4. Матвеева Т. А., *Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения*, дисс. ... канд. физ.-мат. наук, С.-П., 2003, 117 с.

Mathematical modeling of processes of diffusion and advection of radon in piecewise and anisotropic layered media with inclusions

© A. R. Nafikova³, V. N. Krizsky⁴

Abstract. In the work the mathematical model of diffusion of radon in layered anisotropic media with anisotropic inclusions which represents a boundary problem of mathematical physics of parabolic type is constructed. The combined method of the solution problem on the basis of methods of integral transformations, integral representations and the boundary integral equations is offered.

Key Words: diffusion-advection of radon, anisotropic media, boundary problem, method of integral transformations and integral representations, Laplace transform

³ Senior lecturer to chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

⁴ Deputy director for scientific work and innovations, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.