

УДК 550.83

Приближенные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала

© И. В. Бойков¹, В. А. Рязанцев²

Аннотация. Построены итерационные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, ньютоновский потенциал, обратная задача, одновременное восстановление

1. Введение

Проблема восстановления формы тела по создаваемому им на поверхности Земли полю силы тяжести или полю потенциала силы тяжести, является классической в гравиразведке. Введем декартову систему координат, направив ось Oz вертикально вниз. В случае, если тело простирается в бесконечность по одному из направлений и расположено между поверхностями $z = +H$, $z = +H - \phi(x)$, где $\phi(x)$ – неотрицательная функция с финитным носителем $[a, b]$, эта задача описывается уравнением логарифмического потенциала

$$G \int_a^b \sigma(s) \ln \left[\frac{(x-s)^2 + H^2}{(x-s)^2 + (H - \phi(s))^2} \right] ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.1)$$

где $\phi(s)$ – форма поверхности тела; H – глубина залегания; $\sigma(s)$ – плотность тела, G – гравитационная постоянная. Линеаризация уравнения (1.1) описывается линейным интегральным уравнением

$$2GH \int_a^b \frac{\sigma(s)\phi(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = f(x). \quad (1.2)$$

Приближенному решению уравнений (1.1)-(1.2) посвящено большое число работ [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] в которых различными методами определяется граница тела при известной его плотности или плотность тела при известной границе. Насколько авторам известно, в настоящее время методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в задаче логарифмического потенциала отсутствуют.

Рассмотрим случай ньютоновского потенциала. Пусть рудное тело залегает на глубине H , причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \phi(x, y)$ с неотрицательной функцией $\phi(x, y)$, удовлетворяющей условию $\max \phi(x, y) < H$. Тогда гравитационное поле над поверхностью

¹ Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

² Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru.

Земли описывается уравнением

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\phi(\zeta, \eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(\xi - z)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (\xi - z)^2)^{3/2}} d\zeta d\eta d\xi = f(x, y, z), \quad (1.3)$$

где G – гравитационная постоянная, $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ – плотность гравитирующего тела.

Линеаризация уравнения (1.3) приводит к уравнению

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{H\phi(\zeta, \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0).$$

В работах [10], [11], [12], [8], [9] предложены алгоритмы определения формы тела $\phi(\zeta, \eta)$ при известной плотности и плотности тела при известной форме. Методы одновременного восстановления формы тела и его плотности авторам неизвестны.

Ниже, в разделах 2, 3 предлагается метод одновременного восстановления формы тела и его плотности в задаче логарифмического потенциала и обратной трехмерной задаче ньютоновского потенциала.

2. Логарифмический потенциал

Аппроксимируем уравнение (1.1) более простым нелинейным уравнением

$$G \int_a^b \sigma(s) \frac{2H\phi(s) - \phi^2(s)}{(x - s)^2 + H^2} ds = f(x), \quad (2.1)$$

которое получается из уравнения (1.1) при учете второй степени u при разложении функции $\ln(1 + u)$, $u = \frac{2H\phi - \phi^2}{(x-s)^2 + (H-\phi(s))^2}$ в ряд Тейлора и аппроксимации функции $\frac{2H\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + (H-\phi(s))^2}$ функцией $\frac{2H\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + H^2}$.

Предположим, что наряду с измерениями на поверхности Земли, измерения проводятся на высоте $-h$, и результатом этих измерений является функция $f_1(x)$. Очевидно, эта функция оказывается связанной с функциями $\phi(s)$ и $\sigma(s)$ уравнением

$$G \int_a^b \sigma(s) \frac{2(H + h)\phi(s) - \phi^2(s)}{(x - s)^2 + (H + h)^2} ds = f_1(x). \quad (2.2)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.1)-(2.2). Введем неизвестные функции $u_1(s) = \sigma(s)\phi(s)$ и $u_2(s) = \sigma(s)\phi^2(s)$. В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} G \int_a^b \frac{2Hu_1(s) - u_2(s)}{(x - s)^2 + H^2} ds = f(x), \\ G \int_a^b \frac{2(H + h)u_1(s) - u_2(s)}{(x - s)^2 + (H + h)^2} ds = f_1(x), \end{cases} \quad (2.3)$$

Определив из системы (2.3) неизвестные функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$, находим $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$ и $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$.

Систему (2.3) можно решать различными методами. Прежде всего рассмотрим метод интегральных преобразований. Будем считать, что $f(x)$ и $f_1(x)$ – финитные функции с носителем $[a, b]$. В терминах гравиметрии это означает, что влияние гравитирующего тела распространяется только на этот промежуток. Продолжим функции $f(x)$ и $f_1(x)$ нулем на множество $(-\infty, \infty) \setminus [a, b]$ и полученные в результате функции по-прежнему обозначим через $f(x)$ и $f_1(x)$. Положив $G = 1$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hu_1(s) - u_2(s)}{(x-s)^2 + H^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x), & -\infty < x < \infty, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(H+h)u_1(s) - u_2(s)}{(x-s)^2 + (H+h)^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_1(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

Известно [3], что преобразованием Фурье функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H}{x^2 + H^2}$ является функция $e^{-H|\omega|}$. Применим к системе уравнений (2.4) преобразование Фурье. В результате имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-H|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-H|\omega|} U_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega), \\ \sqrt{2\pi} e^{-(H+h)|\omega|} U_1(\omega) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H+h} e^{-(H+h)|\omega|} U_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1(\omega), \end{cases} \quad (2.5)$$

где $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $F(\omega)$, $F_1(\omega)$ – преобразования Фурье функций $u_1(s)$, $u_2(s)$, $f(s)$, $f_1(s)$. Система уравнений (2.5) имеет решение в явном виде:

$$\begin{cases} U_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{H|\omega|} + \frac{1}{2H} U_2(\omega), \\ U_2(\omega) = \frac{H(H+h)}{\pi h} (e^{(H+h)|\omega|} F_1(\omega) - e^{H|\omega|} F(\omega)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Применяя к функциям $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ обратное преобразование Фурье, находим функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$. Для вычисления обратного преобразования Фурье можно применить квадратурные формулы [14].

Задача вычисления обратного преобразования Фурье функций $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ может оказаться некорректной, т. к. из-за вычислительных ошибок произведения $F(\omega)e^{H|\omega|}$ и $F_1(\omega)e^{(H+h)|\omega|}$ могут не стремиться к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$. В этом случае к решению системы уравнений (2.6) естественно применить итерационные методы.

Пусть A и B – достаточно большие положительные числа. Введем сетки узлов $s_k = -A + 2k \frac{A}{N_1}$, $k = 0, 1, \dots, N_1$, $\omega_k = -B + 2k \frac{B}{N_2}$, $k = 0, 1, \dots, N_2$.

Систему уравнений (2.6) аппроксимируем N_2 системами алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-H|\omega_k|} U_1(\omega_k) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H} e^{-H|\omega_k|} U_2(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega_k), \\ \sqrt{2\pi} e^{-(H+h)|\omega_k|} U_1(\omega_k) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{H+h} e^{-(H+h)|\omega_k|} U_2(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_1(\omega_k), \end{cases} \quad k = \overline{0, N_2 - 1}$$

которые запишем в операторной форме

$$A(k)Y(k) = F(k), \quad k = \overline{0, N_2 - 1} \quad (2.7)$$

где $Y(k) = (U_1(\omega_k), U_2(\omega_k))$, $F(k) = (F(\omega_k), F_1(\omega_k))$; построение матрицы $A(k)$ очевидно, а значения $F(\omega_k)$ рассчитываются по квадратурным формулам вычисления прямого преобразования Фурье на сетке s_k .

Для решения систем уравнений (2.7) воспользуемся итерационным методом

$$Y_{m+1}(k) = \alpha Y_m(k) + (1 - \alpha)(Y_m(k) - \beta_k(A^*(k)A(k)Y_m(k) - A^*(k)F(k))), \quad (2.8)$$

где $k = \overline{0, N_2 - 1}$, $m = 0, 1, \dots$, $\beta_k = \frac{1}{2\|A^*(k)A(k)\|}$ в метрике l_2 , $0 < \alpha < 1$. Значения $u_1(s_l)$, $u_2(s_l)$, $l = \overline{0, N_1 - 1}$ вычисляются по квадратурным формулам обратного преобразования Фурье на сетке ω_k .

Пример 2.1. Найти неизвестные функции $\sigma(s)$, $\phi(s)$ из системы уравнений:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s) \frac{10\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + 25} ds = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{113x^2 + 5628}{x^4 + 85x^2 + 1764}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s) \frac{12\phi(s) - \phi^2(s)}{(x-s)^2 + 36} ds = \frac{10\pi}{3} \cdot \frac{4x^2 + 259}{x^4 + 113x^2 + 3136}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Решением данной системы являются функции

$$\sigma(s) = \frac{s^2 + 4}{s^4 + 2s^2 + 1}, \quad \phi(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}. \quad (2.10)$$

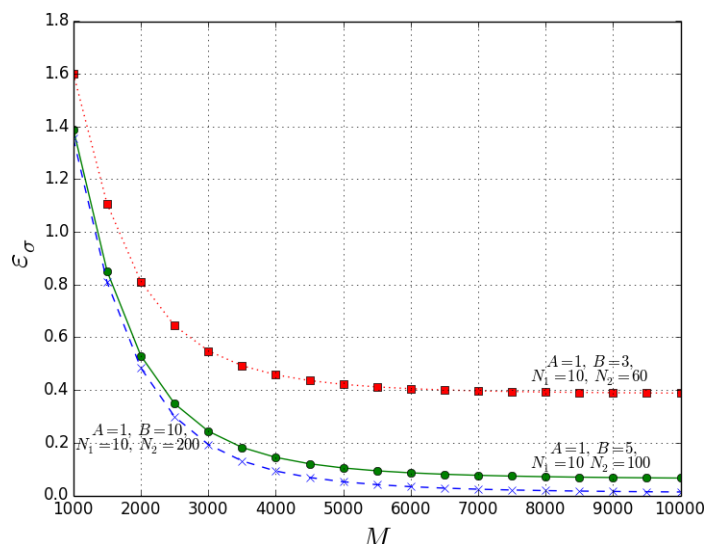
Пара функций $\phi(s)$, $\sigma(s)$ связаны с функциями $u_1(s)$, $u_2(s)$ формулами $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$, $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$. Функции $u_1(s)$, $u_2(s)$ являются прообразами функций $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, которые определяются из системы:

$$\begin{cases} \sqrt{2\pi}e^{-5|\omega|}U_1(\omega) - \sqrt{\frac{\pi}{50}}e^{-5|\omega|}U_2(\omega) = \frac{\pi}{20}(20e^{-6|\omega|} - e^{-7|\omega|}), \\ \sqrt{2\pi}e^{-6|\omega|}U_1(\omega) - \sqrt{\frac{\pi}{72}}e^{-6|\omega|}U_2(\omega) = \frac{\pi}{24}(24e^{-7|\omega|} - e^{-8|\omega|}). \end{cases}$$

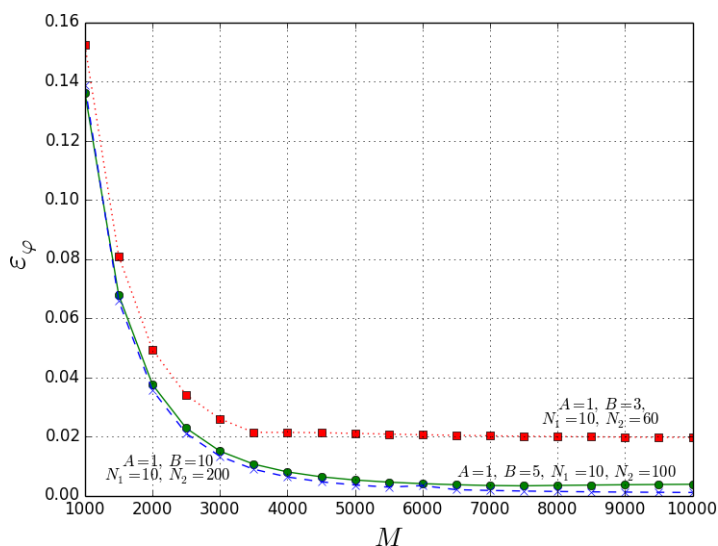
Функции $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$ находим по формулам (2.6):

$$U_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}, \quad U_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-2|\omega|}.$$

Применяя к найденным функциям обратное преобразование Фурье, имеем $u_1(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $u_2(s) = \frac{1}{s^2+4}$, откуда по формулам $\phi(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$, $\sigma(s) = \frac{u_1(s)}{\phi(s)}$ находим решение (2.10) исходной системы (2.9). Система уравнений (2.9) решалась также описанным выше численным методом. Результаты вычислений приведены на рис. 2.1, 2.2.



Р и с у н о к 2.1



Р и с у н о к 2.2

Здесь использованы следующие обозначения: $[-A, A]$ – сегмент, на котором определены функции $\phi(s)$, $\sigma(s)$, $f(s)$; $[-B, B]$ – сегмент, на котором вычислены преобразования Фурье функций $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, $F(\omega)$; N_1 число узлов сетки $s_j = -A + 2A \frac{j}{N_1}$, $j = 0, 1, \dots, N_1$; N_2 – число узлов сетки $\omega_k = -B + 2B \frac{k}{N_2}$, $k = 0, 1, \dots, N_2$; M – число итераций при реализации метода (2.8). Символом ϵ_ϕ (ϵ_σ) обозначена абсолютная погрешность восстановления функции ϕ (σ).

3. Обратная пространственная задача теории потенциала

Введем декартову прямоугольную систему координат, направив ось Oz вниз. Если рудное тело залегает на глубине H , причем его нижняя поверхность совпадает с плоскостью $z = H$, а верхняя поверхность описывается функцией $z(x, y) = H - \phi(x, y)$ с неотрицательной функцией $\phi(x, y)$ и $\max \phi(x, y) < H$, то гравитационное поле над по-

верхностью Земли описывается уравнением

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)(\xi - \eta) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (\xi - z)^2)^{3/2}} = f(x, y, z), \quad (3.1)$$

где G – гравитационная постоянная; $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ – плотность тела. Предполагается, что, во-первых, плотность $\sigma(\zeta, \eta, \xi) \equiv 0$ вне тела; во-вторых, плотность дифференцируема по ξ ; в-третьих, градиент напряженности гравитационного поля известен при $z \leq 0$.

На поверхности Земли уравнение (3.1) имеет вид

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^H \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi)\xi d\xi d\eta d\zeta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0).$$

Вычислив по частям интеграл в левой части предыдущего уравнения, имеем

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \phi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} + \\ + G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H-\phi(\zeta,\eta)}^H \frac{\sigma'_{\xi}(\zeta, \eta, \xi) d\zeta d\eta d\xi}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + \xi^2)^{3/2}} = f(x, y, 0).$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что плотность не зависит от ξ . Тогда приходим к уравнению

$$G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\zeta, \eta) \left[\frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (H - \phi(\zeta, \eta))^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{1/2}} \right] d\zeta d\eta = f(x, y, 0). \quad (3.2)$$

Положим $u = \frac{\phi^2(\zeta, \eta) - 2H\phi(\zeta, \eta)}{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2}$. В предположении, что $|u| < 1$, функцию $(1 + u)^{-1/2}$ разлагаем в ряд

$$\frac{1}{(1 + u)^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} u^n.$$

Тогда уравнение (3.2) имеет вид

$$G \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta) (\phi^2(\zeta, \eta) - 2H\phi(\zeta, \eta))^n d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{n+1/2}} = f(x, y, 0).$$

Ограничиваясь первым слагаемым в левой части, приходим к уравнению:

$$-\frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta) (\phi^2(\zeta, \eta) - 2H\phi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + H^2)^{3/2}} = f(x, y, 0). \quad (3.3)$$

Проведя измерения на высоте h над поверхностью Земли, приходим к уравнению:

$$-\frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta)(\phi^2(\zeta, \eta) - 2(H+h)\phi(\zeta, \eta)) d\zeta d\eta}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H+h)^2)^{3/2}} = f(x, y, -h). \quad (3.4)$$

Определим функции $\sigma(\zeta, \eta)$ и $\phi(\zeta, \eta)$ из решения системы (3.3)-(3.4). Введем функции $u_1(\zeta, \eta) = \sigma(\zeta, \eta)\phi(\zeta, \eta)$ и $u_2(\zeta, \eta) = \sigma(\zeta, \eta)\phi^2(\zeta, \eta)$. Тогда система уравнений (3.3)-(3.4) примет вид

$$\begin{cases} \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2Hu_1(\zeta, \eta) - u_2(\zeta, \eta)}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + H^2)^{3/2}} d\zeta d\eta = f(x, y, 0), \\ \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(H+h)u_1(\zeta, \eta) - u_2(\zeta, \eta)}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (H+h)^2)^{3/2}} d\zeta d\eta = f(x, y, -h). \end{cases} \quad (3.5)$$

Применим к уравнениям системы (3.5) преобразование Фурье. Известно [3], что преобразование Фурье функции $\frac{H}{(x^2+y^2+H^2)^{3/2}}$ равно $e^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$. В результате приходим к системе:

$$\begin{cases} 2\pi G e^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} U_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{\pi G}{H} e^{-H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} U_2(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2, 0), \\ 2\pi G e^{-(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} U_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{\pi G}{H+h} e^{-(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} U_2(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2, -h), \end{cases} \quad (3.6)$$

где $U_1(\omega_1, \omega_2)$, $U_2(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2, 0)$, $F(\omega_1, \omega_2, -h)$ – преобразования Фурье функций $u_1(\zeta, \eta)$, $u_2(\zeta, \eta)$, $f(x, y, 0)$, $f(x, y, -h)$.

Система (3.6) имеет решение в аналитической форме:

$$\begin{cases} U_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}}{2\pi G} F(\omega_1, \omega_2, 0) + \frac{1}{2H} U_2(\omega_1, \omega_2), \\ U_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{(H+h)H}{\pi G h} \left(e^{(H+h)\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} F(\omega_1, \omega_2, -h) - e^{H\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} F(\omega_1, \omega_2, 0) \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Применив к функциям $U_1(\omega_1, \omega_2)$ и $U_2(\omega_1, \omega_2)$ обратное преобразование Фурье, находим $u_1(\zeta, \eta)$ и $u_2(\zeta, \eta)$, после чего вычисляем искомые функции $\sigma(\zeta, \eta)$ и $\phi(\zeta, \eta)$:

$$\phi(\zeta, \eta) = \frac{u_2(\zeta, \eta)}{u_1(\zeta, \eta)}, \quad \sigma(\zeta, \eta) = \frac{u_1(\zeta, \eta)}{\phi(\zeta, \eta)}. \quad (3.8)$$

Пример 3.1. Найдем функции $\sigma(\xi, \eta)$, $\phi(\xi, \eta)$ из системы

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta)(6\phi(\zeta, \eta) - \phi^2(\zeta, \eta))}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + 9)^{3/2}} d\zeta d\eta = \frac{16\pi}{(x^2 + y^2 + 16)^{3/2}} - \frac{5\pi/3}{x^2 + y^2 + 25}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta, \eta)(8\phi(\zeta, \eta) - \phi^2(\zeta, \eta))}{((x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + 16)^{3/2}} d\zeta d\eta = \frac{20\pi}{(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} - \frac{3\pi/2}{(x^2 + y^2 + 36)^{3/2}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Введя замену неизвестных функций $u_1 = \sigma(\zeta, \eta)\phi(\zeta, \eta)$, $u_2 = \sigma(\zeta, \eta)\phi^2(\zeta, \eta)$, переходим от системы (3.9) к системе

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6u_1(\zeta, \eta) - u_2(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + 9)^{3/2}} d\zeta d\eta = \frac{16\pi}{(x^2 + y^2 + 16)^{3/2}} - \frac{5\pi/3}{x^2 + y^2 + 25}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8u_1(\zeta, \eta) - u_2(\zeta, \eta)}{((x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + 16)^{3/2}} d\zeta d\eta = \frac{20\pi}{(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} - \frac{3\pi/2}{(x^2 + y^2 + 36)^{3/2}}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Применим к системе (3.10) преобразование Фурье, в результате чего получим следующую систему в спектральной области:

$$\begin{cases} 4\pi e^{-3\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} U_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{2\pi}{3} e^{-3\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} U_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{3} \left[12e^{-4\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} - e^{-5\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right], \\ 4\pi e^{-4\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} U_1(\omega_1, \omega_2) - \frac{\pi}{2} e^{-4\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} U_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{4} \left[16e^{-5\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} - e^{-6\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \right]. \end{cases}$$

Решение этой системы (при $G = 1$):

$$\begin{cases} U_1(\omega_1, \omega_2) = e^{-\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \\ U_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Применив к (3.11) обратное преобразование Фурье, получаем точное решение системы (3.9)

$$u_1(\zeta, \eta) = (x^2 + y^2 + 1)^{-3/2}, \quad u_2(\zeta, \eta) = (x^2 + y^2 + 4)^{-3/2}$$

Используя соотношения (3.8), выражаем неизвестные функции $\sigma(\zeta, \eta)$, $\phi(\zeta, \eta)$, определяющие точное решение исходной системы (3.9).

$$\sigma(\xi, \eta) = \left(\frac{x^2 + y^2 + 4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)^{3/2}, \quad \phi(\xi, \eta) = \left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 4} \right)^{3/2}.$$

Из-за различного рода погрешностей (в частности, вычислительных) произведения $e^{H\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} F(\omega_1, \omega_2, 0)$ и $e^{(H+h)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} F(\omega_1, \omega_2, -h)$ могут не стремиться к нулю при $|\omega_1| \rightarrow \infty$, $|\omega_2| \rightarrow \infty$. Поэтому к функциям $U_1(\omega_1, \omega_2)$, $U_2(\omega_1, \omega_2)$ может оказаться неприменимым обратное преобразование Фурье. В этом случае для вычисления функций $u_1(\zeta, \eta)$ и $u_2(\zeta, \eta)$ необходимо применить методы регуляризации. В частности, можно ввести регуляризирующие множители, подобные приведенным в одномерном случае в [2].

Более эффективным является итерационный метод. Пусть A и B – достаточно большие положительные числа, так что прямое преобразование Фурье вычисляется в квадрате $[-A, A]^2$, а обратное преобразование Фурье вычисляется в квадрате $[-B, B]^2$. Пусть $\omega_k = -B + 2k\frac{B}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Введем сетку узлов $w_{kl} = \{\omega_k, \omega_l\}$, $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$. Системе уравнений (3.6) поставим в соответствие N^2 систем уравнений

$$\begin{cases} 2\pi G e^{-H\sqrt{\omega_k^2 + \omega_l^2}} U_1(\omega_k, \omega_l) - \frac{\pi G}{H} e^{-H\sqrt{\omega_k^2 + \omega_l^2}} U_2(\omega_k, \omega_l) = F(\omega_k, \omega_l, 0), \\ 2\pi G e^{-(H+h)\sqrt{\omega_k^2 + \omega_l^2}} U_1(\omega_k, \omega_l) - \frac{\pi G}{H+h} e^{-(H+h)\sqrt{\omega_k^2 + \omega_l^2}} U_2(\omega_k, \omega_l) = F(\omega_k, \omega_l, -h), \end{cases} \quad (3.12)$$

где $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$.

Представим системы (3.12) в матричном виде

$$A(k, l)Y(k, l) = F(k, l), \quad k, l = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.13)$$

где $F(k, l) = (F(\omega_k, \omega_l, 0), F(\omega_k, \omega_l, -h))$, построение матриц $A(k, l)$ очевидно.

Приближенное решение систем уравнений (3.13) ищется итерационным методом:

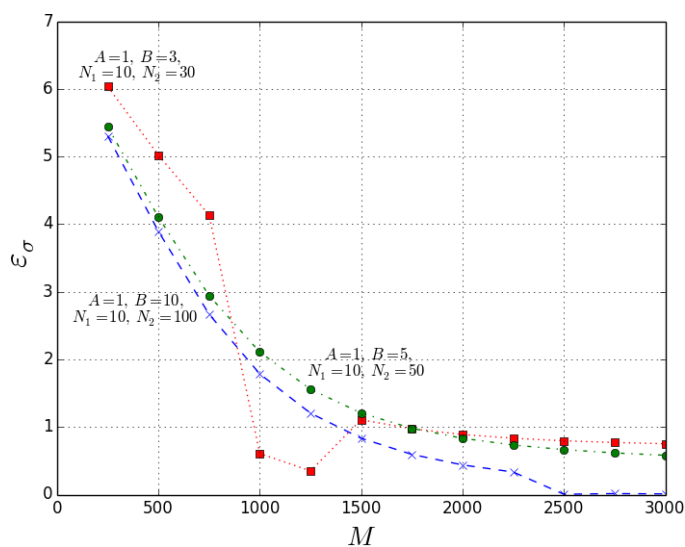
$$Y_{m+1}(k, l) = \alpha Y_m(k, l) + (1 - \alpha)(Y_m(k, l) - \beta_{kl}(A^*(k, l)A(k, l)Y_m(k, l) - A^*(k, l)F(k, l))), \quad (3.14)$$

где $m = 0, 1, \dots, k, l = 0, 1, \dots, 2N - 1, 0 < \alpha < 1$.

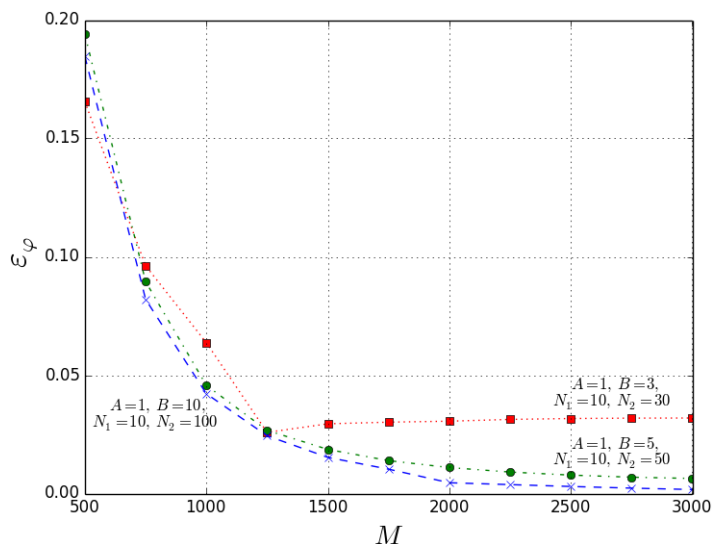
Параметр β_{kl} выбирается из требования, чтобы $\beta_{kl} = \frac{1}{2\|A^*(k, l)A(k, l)\|}$. Обоснование сходимости последовательности (3.14) в l_2 проводится на основе утверждений работ [13], [15]. Значения функций u_1 и u_2 находятся по кубатурным формулам обратного преобразования Фурье.

Пример 3.2. Найти решение системы уравнений (3.9) итерационным методом (3.13)-(3.14).

Результаты решения представлены на рисунках 3.1 и 3.2. Здесь $\Omega_1 = [-A, A]^2$ - область определения функций $u_1(x, y), u_2(x, y), f(x, y)$; $\Omega_2 = [-B, B]^2$ - область определения функции $U_1(\omega_1, \omega_2), U_2(\omega_1, \omega_2), F(\omega_1, \omega_2)$. Пусть $\{x_i, x_j\}$ - узлы построенной в Ω_1 равномерной сетки, где $x_i = -A + 2i\frac{A}{N_1}, i = 0, 1, \dots, N_1$. Пусть $\{\omega_k, \omega_l\}$ - узлы построенной в Ω_2 равномерной сетки, где $\omega_k = -B + 2k\frac{B}{N_2}, k = 0, 1, \dots, N_2$. Обозначим через M число итераций метода (3.14), через ϵ_φ (ϵ_σ) - абсолютную погрешность восстановления функции ϕ (σ).



Р и с у н о к 3.1



Р и с у н о к 3.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гласко В. Б., Остромогицкий А. Х., Филатов В. Г., “О восстановлении глубин и формы контактной поверхности на основе регуляризации”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **10:5** (1970), 1292–1297.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974.
3. Мудрецова Е. А., *Гравиразведка*, Недра, М., 1990.
4. Старостенко В. И., *Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии*, Наукова думка, Киев, 1978.
5. Филатов В. Г., “Применение метода Тсубои в обратных задачах гравиразведки”, *Прикладная геофизика*, 1972, № 68, 147–152.
6. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В., “Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. I”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1992, № 6, 48–58.
7. Старостенко В. И., Черная Н. Н., Черный А. В., “Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности. III”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1993, № 7, 57–66.
8. Бойков И. В., Мойко Н. В., “Об одном итерационном методе решения обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности”, *Известия РАН. Физика Земли*, 1999, № 2, 52–56.
9. Бойков И. В. Бойкова А. И., “Об одном параллельном методе решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии”, *Известия РАН. Физика Земли*, 2009, № 3, 73–82.

10. Пруткин И. Л., “О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок”, *Известия АН СССР. Физика Земли*, **1** (1983), 53–58.
11. Мартышко П. С., “Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных”, *Известия РАН. Физика Земли*, 2010, № 11, 23–35.
12. Prutkin I., Saleh A., “Gravity and magnetic data inversion for 3D topography of the Mono discontinuity in the northern Red Sea area, Egypt”, *Journal of Geodynamics*, 2009, № 47, 237–245.
13. Бакушинский А. Б., Страхов В. Н., “О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **8:1** (1968), 181–185.
14. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2008.
15. Обломская Л. Я., “О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **8:2** (1968), 417–426.

Approximation methods for simultaneous reconstruction of shape and density of the body in the inverse potential problem.

© I. V. Boikov³, V. A. Ryazantsev⁴

Abstract. Analytical and approximation methods for simultaneous reconstruction of shape and density of the body in the inverse potential problem are offered

Key Words: logarithmic potential, Newtonian potential, inverse problem, simultaneous recovery.

³ Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru.

⁴ Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; ryazantsev@mail.ru