УДК 517.929

Новый метод вычисления ранга матрицы

© В. И. Зубов [1], И. В. Зубов [2], А. Ф. Зубова [3]

Аннотация. В работе предлагаются новые методы построения решений и псевдорешений систем линейных алгебраических уравнений с вырожденной матрицей. Эти методы позволяют для совместных и несовместных систем линейных алгебраических уравнений находить решения или псевдорешения этих систем в пределах точности представления чисел в компьютере и свободны от ошибок округления. Предлагается также новый метод вычисления ранга матрицы.

Ключевые слова: вектор, матрица, коэффициент, положение равновесия, подпространство, итерационный процесс, линейная независимость

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = B, \tag{1.1}$$

где матрица A размера $n \times m$ ($m \leq n$) и вектор B размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными.

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы A равен m, то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \to C^T C = X^T A^T AX = \|C\|^2 > 0 \to A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица A имеет ранг равный m

$$\dot{X} = -A^T AX + A^T B. \tag{1.2}$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Положение равновесия системы* (1.2) *является решением системы* (1.1) *или ее псевдорешением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как матрица $-A^T AX$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T AC + A^T B = 0 \,\text{или}\, C = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{1.3}$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (1.1) получено.

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор B в виде разложения по подпространствам, одно из которых L_1, является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы A, а второе L_2, является ортогональным дополнением первого, т. е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (1.3) примет вид:

$$-A^T AC - A^T(B_1 + B_2) = -A^T AC + A^T B_1 = 0$$

или

[1] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{1.4}$$

Покажем, что найденная величина C, является псевдорешением уравнения (1.1), т. е. имеет место неравенство

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|, \, X \neq C,$$

где $\| \, \|$ - евклидова норма. Это будет и означать, что квадратичное отклонение $\|AX - B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [1]. Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX, \, U + V = B - AX,$$

тогда

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т. е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того, чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A^{-1}) A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (1.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A) X_k + hA^T B, \tag{1.5}$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (1.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления точности чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|, \, k = 1, 2, \ldots.$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (1.5) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (1.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (1.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большего порядка (Рунге - Кутта и т.д.) не является необходимым, т. к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

Рассмотрим теперь случай, когда столбцы матрицы A - линейно зависимы. Для того, чтобы найти решение (псевдорешение) уравнения (1.1) достаточно найти линейно независимые столбцы матрицы A и использовать процедуру предложенную выше.

Для этого обозначим столбцы матрицы A через $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и рассмотрим двухстолбцовую матрицу (A_1, A_2). Если матрица $(A_1, A_2)^T(A_1, A_2) > 0$, то тогда векторы линейно независимы. В противном случае проверим матрицу $(A_1A_3)^T(A_1A_3)$ и т.д.

Допустим столбцы A_1 и A_2 линейно независимы. Далее будем рассматривать матрицу $(A_1, A_2, A_3)^T \ (A_1, A_2, A_3)$ и проверять ее положительную определенность. Действуя таким же образом, в конце концов, найдем все линейно независимые столбцы матрицы $A : A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ и для матрицы $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = \bar{A}$ будем искать решение (псевдорешение) уравнения

$$\bar{A}X = B, \tag{1.6}$$

которое и будет одним из решений (псевдорешений) уравнения (1.1).

Т е о р е м а 1.2. *Ранг матрицы A размера $n \times m$ равен рангу неотрицательной матрицы A^TA, т. е. совпадает с числом ее положительных собственных чисел.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r, тогда согласно формуле Бине - Коши [1] $rankA^TA \leq r$. Нетрудно видеть, что матрица A^TA - неотрицательная, т. к.

$$\forall x \neq 0 \quad AX = C \rightarrow C^TC = X^TA^TAX = \|C\|^2 \geq 0 \rightarrow A^TA \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что все собственные числа матрицы A^TA - неотрицательные.

Обозначим матрицу, образованную $r-$ линейно независимыми столбцами матрицы A с номерами $i_1, \ldots, i_r$, как матрицу B. Тогда, как было показано выше $B^TB > 0$ и, следовательно, ее ранг равен r.

Так как матрица B^TB стоит на пересечении $i_1, \ldots, i_r$ строк и $i_1, \ldots, i_r$ столбцов матрицы A^TA, $rankA^TA \geq rankB^TB = r$. Это означает, что $r = rankA^TA$. Так как матрица A^TA неотрицательна, то r ее собственных чисел положительны, а остальные равны нулю.

С л е д с т в и е 1.1. *Из теоремы 1.1. вытекает новый вычислительный метод определения ранга матрицы A. Достаточно построить симметричную матрицу $A^TA \geq 0$ и методом Лагранжа и Якоби привести к каноническому виду $Q^TA^TAQ = \Lambda$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. В силу закона инерции квадратичных форм $\Lambda \geq 0$, а ее ранг равен числу положительных диагональных элементов и равен рангу матрицы A^TA и соответственно, матрицы A.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. В.В. Воеводин Ю.А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М, 1984.

2. И.В. Зубов, “Свойства дифференциальных уравнений минимизации функционалов в гильбертовом пространстве”, Математические методы оптимизации и управления в сложных системах (Межвуз. темат. сб. / отв. ред. Ю.А. Абрамов.), 1982, 24-27.

The new method of calculating rank of matrix

© V. I. Zubov [4], I. V. Zubov [5], A. F. Zubova [6]

Abstract. In work is supposes the new methods of building the solutions and pseudo solutions of systems linear algebraic equations with born matrix. This methods is allows for joint and unjoint systems linear algebraic equations is finds the solutions or pseudo solutions this systems in limits exactness presentation the numbers in computer and is free from mistakes of districtness. Is supposes also new method of calculating of rank matrix.

Key Words: vector, matrix, coefficient, solution of equilibrium, subspace, iteration process, linear independent

[4] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru