УДК 517.929

Способ приведения трехмерной квадратичной системы к одному уравнению второго порядка

© А. Ф. Зубова[1], В. И. Зубов[2], И. В. Зубов[3], С. А. Стрекопытов[4]

Аннотация. В данной статье рассмотрен способ приведения трехмерной системы дифференциальных уравнений к одному уравнению второго порядка. Проведено исследование простых по структуре дифференциальных уравнений, разработана технология построения простых квадратичных систем, обладающих заданными предельными свойствами, важными в задачах управления.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, частный интеграл, управляемые системы

Необходимым математическим аппаратом описания динамических процессов являются системы дифференциальных уравнений. Поэтому задачи современной автоматики, то есть задачи создания новых эффективных систем управления различными технологическими комплексами и техническими объектами, обусловливают развитие методов исследования линейных и нелинейных систем обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, описывающих динамику функционирования систем автоматического управления. Задачи управления на протяжении последних десятилетий были основными «потребителями» достижений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории нелинейных колебаний. Задача прогнозирования поведения моделируемых систем в количественном плане сводится к численному интегрированию уравнений динамики. В качественном плане - к аналитическому исследованию системы для установления структурных особенностей моделируемой системы - наличия инвариантных множеств, характера предельного поведения решений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + z + xz, \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = \frac{1}{2}x^2 + C$, где $C = const$. В связис этим систему (1.1) можно привести к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = C + (1 + C)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \tag{1.2}$$

Умножим обе части (1.2) на $\dot{x}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. Получим

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = C_1 + Cx + \frac{1}{2}(1 + C)x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \quad (C_1 = const). \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Извлечем квадратный корень и проинтегрируем снова; получим

$$\int \frac{4}{\sqrt{2C_1+2Cx+(1+C)x^2+x^3/3+x^4/4}} = t + C_2 \quad (C_2 = const). \tag{1.4}$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.4), является гиперэллиптическим [1]. Гиперэллиптические функции, появляющиеся при обращении этого интеграла, когда мы хотим явно выписать решение $x(t)$ системы (1.1), характеризуются наличием нескольких периодов, которые зависят от начальных данных. Рассмотрим еще одну систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= xz + a, \\ \dot{z} &= 4xy + 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = 2x^2 + t + c$, что позволяет привести (1.5) к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = 2x^3 + (t + C)x + a. \tag{1.6}$$

С помощью подстановки $x = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(t+C)$ это уравнение приводится к нормальному виду Пенлеве [2]

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha. \tag{1.7}$$

Пенлеве показал, что решения уравнения (1.7) описываются принципиально новыми трансцендентными функциями, которые не сводятся к ранее изученным функциям и которые стали называть *трансцендентными функциями Пенлеве* [3]. Ученик Пенлеве Ж. Шази (1882-1955) изучал, в частности, уравнение

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2, \tag{1.8}$$

к которому приводится квадратичная система

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = 2xz - 3y^2.$$

Шази установил, что интеграл столь простого по виду уравнения имеет весьма сложные особенности и связан с интегралами гипергеометрического уравнения и функциями Шварца. Приведенные примеры показывают, что решения систем дифференциальных уравнений простой структуры могут иметь чрезвычайно сложную аналитическую природу. "Простота"структуры квадратичных систем, описывающих системы со странными аттракторами, также указывают на это. В практических задачах построения уравнений управляемого движения наиболее важным является требование их аналитической простоты. Это связано с возможностью их инженерной реализации. Поэтому важной представляется разработка технологии построения «простых» (например, квадратичных) систем, обладающих заданными предельными свойствами, важными в задачах управления. Важнейшим таким свойством является наличие автоколебания или совокупности автоколебаний (аттрактора), имеющих заданный или желаемый диаметр. Практически это будет означать, что построенная управляемая система будет иметь предельный режим с заданной геометрической характеристикой, т.е. фазовые переменные будут находиться в желаемых пределах. Как осуществить такое построение? Основным подходом в теории управляемых систем является решение обратной задачи механики, когда по заданным кинематическим элементам движения строятся уравнения динамики системы. Такими кинематическими элементами могут быть заданная траектория или заданная совокупность траекторий (инвариантное множество). Решение обратной задачи механики в полном объеме, по-видимому, впервые было осуществлено И. Ньютоном при открытии закона всемирного тяготения. Н.П. Еругин решил эту задачу в случае заданной интегральной кривой или заданного первого или частного интеграла.

Теорема 1.1. *(Еругин). Для того чтобы система дифференциальных уравнений*

$$\dot{X} = F(X) \tag{1.9}$$

имела частный интеграл $V(X) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы правая часть системы (1.9) *имела следующий вид:*

$$F = \nabla V \cdot M(V, X) + N(X),$$

где $(\nabla V, N(X)) = 0$, $M(0, X) \equiv 0$. Причем, если поверхноть $V(X) = 0$ не имеет точек покоя, то векторная функция $N(X)$ не должна обращаться в нуль-вектор на этой поверхности.

Можно задать желаемое предельное множество в виде замкнутой гладкой компактной поверхности и построить семейство дифференциальных уравнений, имеющих ее в качестве интегральной. Можно построить и такие системы, для которых данная интегральная поверхность будет асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством. Другой вопрос состоит в том, насколько будут просты получаемые уравнения? Ведь даже задавая поверхность в виде эллипсоида, получаем уравнения, не являющиеся простыми. Кроме того, данный класс уравнений ограничен интегрируемым по определению случаем. Поэтому возникает желание использовать и неинтегрируемые системы для построения компактных, простых для инженерной реализации управляемых систем, которые будут иметь заданные геометрические характеристики предельного режима. Хотя аналитическая природа решений такой системы может быть весьма сложной. Пусть $V(X)$, $W(X)$ - положительно определенные функции, обладающие свойствами

$$V(X_1) = 0, \quad W(X_2) = 0, \quad V, W \to \infty$$

при $\|X\| \to \infty$. Пусть на решениях некоторой гипотетической системы дифференциальных уравнений, имеющей продолжаемые решения, а также нулевое решение

$$\dot{X} = F(X), \tag{1.10}$$

выполнено соотношение

$$\dot{V} = -W. \tag{1.11}$$

Тогда из теоремы Ляпунова об устойчивости следует, что система (1.10) имеет асимптотически устойчивое в целом положение равновесия $X = 0$. Пусть V, W суть заданные функции с вышеупомянутыми свойствами. Рассмотрим уравнение

$$\nabla V \cdot F = W. \tag{1.12}$$

Это уравнение определяет класс систем (1.10), на решениях которых выполнено соотношение (1.11). Часть решений этого уравнения определяют системы с продолжаемыми решениями. Именно эти решения и являются интересными в практическом, инженерном смысле. Выбирая из этих решений системы в некотором смысле "простого"вида, мы получаем множество интересующих нас систем. Рассмотрим теперь, следующее уравнение, выполненное на решениях гипотетической системы (1.10):

$$\dot{V} = -W + C \quad (C = const). \tag{1.13}$$

Поскольку все решения (1.10) продолжаемы, то необходимо, чтобы выполнялось условие $C \geq 0$. Система (1.10) будет в этом случае равномерно диссипативной и будет иметь компактный предельный режим - автоколебание или совокупность автоколебаний (аттрактор). По уравнению (1.13) при заданных функциях V, W и контакте C можно построить все дифференциальные системы, на решениях которых выполняется это соотношение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,z), \\ \dot{y} &= g(x,y,z), \\ \dot{z} &= h(x,y,z). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Предположим, что у системы (1.14) существует стационарный интеграл:

$$v(x,y,z) = c, \tag{1.15}$$

где $c = const$. Функция (1.15) удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$v_x f + v_y g + v_z h = 0.$$

Иными словами, вектор $grad(v) = (v_x, v_y, v_z) = \nabla v$ ортогонален вектору (f, g, h). Следовательно, вектор ∇v лежит в подпространстве, ортогональном вектору $f = (f, g, h)$. В качестве базиса этого подпространства можно взять, например, такие векторы:

$$g_1 = (g-h, h-f, f-g),$$

$$g_2 = (g(f-g) - h(h-f), h(g-h) - f(f-g), f(h-f) - g(g-h)).$$

Имеем

$$(f, g_1) = 0,\ (f, g_2) = 0,\ (g_1, g_2) = 0,\ g_2 = f \times g_1.$$

По нашему предположению имеем

$$\nabla v = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2,$$

где μ_1, μ_2 - скалярные функции независимых переменных x, y, z. Если функция v представима в виде $v = v_1 + v_2$, так что выполнено соотношение $\nabla v = \nabla v_1 + \nabla v_2$, а векторы ∇v_1, ∇v_2 коллинеарны соответственно векторам g_1, g_2, то справедливы последующие рассуждения. По нашему предположению функция (1.15) существует, следовательно, хотя бы при одном $i = 1, 2$ имеет нетривиальное решение система уравнений

$$\nabla v_i = \mu g_i, \tag{1.16}$$

где $\mu = \mu(x,y,z)$ - некоторая скалярная функция. Выпишем условия интегрируемости уравнений (1.16) для $i = 1$:

$$\mu_y(g-h) + \mu(g_y - h_y) = \mu_x(h-f) + \mu(h_x - f_x),$$

$$\mu_z(g-h) + \mu(g_z - h_z) = \mu_x(f-g) + \mu(f_x - g_x),$$

$$\mu_z(h-f) + \mu(h_z - f_z) = \mu_y(f-g) + \mu(f_y - g_y).$$

Последнюю систему можно записать в матрично-векторной форме:

$$A_1 \nabla \mu = \mu F_1. \tag{1.17}$$

Матрица A_1 и вектор F_1 в выражениях (1.17) определены вполне:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(h-f) & g-h & 0 \\ -(f-g) & 0 & g-h \\ 0 & -(f-g) & h-f \end{pmatrix}, \ F_1 = \begin{pmatrix} h_x - f_x - (g_y - h_y) \\ f_x - g_x - (g_z - h_z) \\ f_y - g_y - (h_z - f_z) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A_1 в силу своей структуры является вырожденной при любых f, g, h. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнения (1.17) возможно лишь тогда, когда вектор F лежит в подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A:

$$rank(A) = rank(A, F).$$

Нетривиальным решением для нас будет также ситуация, когда $F_1 = 0$, при этом получается $\mu(x, y, z) = const$. При $i = 2$ получаем следующие значения для матрицы A и вектора F:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -h(g-h) + f(f-g) & g(f-g) - h(h-f) & 0 \\ -f(h-f) + g(g-h) & 0 & g(f-g) - h(h-f) \\ 0 & -f(h-f) + g(g-h) & g(f-g) - f(f-g) \end{pmatrix},$$

$$F_2[1] = f_x(g-3f) - f_y(g+h) + g_x(h+f) - g_y(f-2g) + h_x(g-2h) + h_y(2h-f),$$

$$F_2[2] = f_x(h-2f) - f_z(g+h) + g_x(h-2g) + g_z(2g-f) + h_x(f+g) + h_z(2h-f),$$

$$F_3[3] = f_z(2f-g) + f_y(h-2f) - g_z(h+f) - g_y(2g-2h) + h_z(2h-g) + h_y(f+g).$$

Матрица A_2 также вырожденная, и решение возможно тоже не всегда. Таким образом, в невырожденных случаях система дифференциальных уравнений для функций μ_1, μ_2 выглядит следующим образом:

$$A_1 \nabla \mu_1 + A_2 \nabla \mu_2 = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2. \tag{1.18}$$

Это - система трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций. Для ее исследования заметим сначала, что, поскольку матрицы A_1, A_2 вырожденные, уравнения (1.18) не могут быть разрешены относительно всех трех производных μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} или μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, но в общем случае система (1.18) может быть разрешена относительно двух производных, например, по x, y:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \mu_1}{\partial x} &= a(x,y,z)\mu_1 + A(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}), \\ \tfrac{\partial \mu_1}{\partial y} &= b(x,y,z)\mu_1 + B(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь A, B - линейные функции по μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}. Дифференцируя первое уравнение по y, а второе по x, получаем

$$(a_y - b_x)\mu_1 = L[\mu_2], \tag{1.20}$$

где

$$L[\mu_2] = -(aB - bA + \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy})$$

- дифференциальный оператор второго порядка. Р. Курант [5] показал, что в аналитическом случае условие

$$a_y = b_x \tag{1.21}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости системы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.2. *Необходимым условием существования стационарного интеграла для системы* (1.18) *является выполнение условий* (1.21).

В самом общем случае, приведем систему (1.9) к следующему виду: члены, содержащие величины μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, перенесем в правую часть, содержащие величины μ_1, μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} - в левую. Введем новые неизвестные величины $\alpha_1(x,y,z)$, $\alpha_2(x,y,z)$, $\alpha_3(x,y,z)$. Получим соотношения

$$\begin{array}{l} A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 = \alpha_1, \\ A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 = \alpha_2, \\ A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 = \alpha_3, \\ A_2[1,1]\mu_{2_x} + A_2[1,2]\mu_{2_y} + F_2[1]\mu_2 = \alpha_1, \\ A_2[2,1]\mu_{2_x} + A_2[2,3]\mu_{2_z} + F_2[2]\mu_2 = \alpha_2, \\ A_2[3,2]\mu_{2_y} + A_1[3,3]\mu_{2_z} + F_1[3]\mu_2 = \alpha_3. \end{array} \tag{1.22}$$

Мы получили две группы уравнений, первую из которых - для неизвестной функции μ_1, вторую - от μ_2. В теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка такие уравнения называются *общими линейными* [4] или *линейными неоднородными* [3]. Не ограничивая общности, рассмотрим первые три уравнения (1.22):

$$\begin{array}{l} X_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 - \alpha_1 = 0, \\ X_2(\mu_1) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 - \alpha_2 = 0, \\ X_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 - \alpha_3 = 0. \end{array} \tag{1.23}$$

Введем обозначения

$$\bar{X}_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y},$$

$$\bar{X}_2(\mu_2) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z},$$

$$\bar{X}_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z}.$$

Поскольку матрица A_1 вырожденная, из системы (1.23) невозможно найти величины μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z}. Приведем систему (1.23) к замкнутой форме. В общем случае можно взять два линейно независимых по μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} уравнения, например, X_1, X_2, и составить скобку Якоби:

$$[X_1, X_2] = A_1[1,1](\frac{\partial X_2}{\partial x} + \mu_{1_x}F_1[2]) - A_1[2,1](\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mu_1 F_1[1]) +$$

$$+ A_1[1,2](\frac{\partial X_2}{\partial y} + \mu_{1_y}F_1[2]) - A_1[2,3](\frac{\partial X_1}{\partial z} + \mu_{1_z}F_1[2]).$$

Известно [1, 2], что $[X_1, X_2] = \bar{X}_1(X_2(\mu_1)) - \bar{X}_2(X_1(\mu_1))$. Может оказаться так, что получившиеся уравнение линейно независимо с уравнениями X_1, X_2, тогда получившуюся системк можно разрешить относительно μ_1.

2. Заключение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае неосуществимо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. М.Б. Авдеева, С.В. Зубов, И.С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 9-12.

2. А.В. Зубов, К.А. Пешехонов, С.А. Стрекопытов, М.В. Стрекопытова, “Трехмерные квадратичные системы”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 13-16.

3. В.И. Зубов, И.В. Зубов, А.Ф. Зубова, А.И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *"Дифференциальные уравнения"*, Известия Российской академии наук (Рязань), **17**, Рязанский гос. университет, 390000, г. Рязань, ул. Свободы, 36, 2012, 17-20.

4. А.В. Зубов, С.В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ "Мобильность-плюс", СПб., 2012, 357 с.

5. А.В. Зубов, О.А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

The method of bring third measures quadrate systems from one equation of second order

© **A. F. Zubova**[5], **V. I. Zubov**[6], **I. V. Zubov**[7], **S. A. Strecopitov**[8]

Abstract. In giving article is looks the way of bring third quadrate system of differential equations ti one equation of second order. Is bring investigation simple on structure differential equations, is works technology of building simple quadrate systems, is possesses giving limiting measures, important in the tasks of controlling.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, partial integral, controlled system

[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Professor chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Docent chair theory control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru