УДК 517.9

Доказательство регулярной локальной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины

© **Л. Е. Платонова**[1]

Аннотация. Рассмотрено квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка с начальными условиями, заданными в декартовых координатах. Доказана теорема, в которой сформулированы условия локальной разрешимости и показано, что решение имеет ту же гладкость, что и начальная функция.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$\partial_{x_2}u + u\partial_{x_1}u = -U(x_1, x_2, u)u, \tag{1.1}$$

где $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, 2, \quad U(x_1, x_2, u) \in \overline{C}^{2,1,2}$. Решение ищется в окрестности некоторой линии L, которая задается уравнением $x_2 = \phi(x_1), \quad -\infty < x_1 < +\infty$. Соответственно, задача Коши ставится следующим образом:

$$u(x_1, x_2)|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty). \tag{1.2}$$

Функции $\phi(x_1)$, $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$, где $\overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $N_\gamma = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$. В общих чертах схема применения метода дополнительного аргумента (далее МДА) к задаче Коши вида (1.1), (1.2) была намечена в [3].

В рамках данной работы рассмотрен случай, когда линия L и область определения неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ содержится во множестве

$$\Omega_\beta = \left\{ (x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty;+\infty)} (\phi(x_1) - \beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max_{(-\infty;+\infty)} (\phi(x_1) + \beta_0) \right\}, \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Принципиальная особенность изучаемой задачи состоит в том, что наряду с поиском неизвестной функции $u(x_1, x_2)$ ищется и область определения решения. Соответственно, постоянная β_0 должна быть достаточно велика, чтобы искомая область определения $u(x_1, x_2)$ входила в Ω_β. Обозначим эту заранее неизвестную область определения решения задачи (1.1), (1.2) через $Q = \{(x_1, x_2, u) : (x_1, x_2) \in \Omega_\beta, |u| \leqslant 10N_\gamma\}$. Так как в данной статье речь идет о локальной разрешимости, то область Q представляет собой некоторую окрестность кривой L.

[1] Старший преподаватель кафедры математики и математического образования, Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, г. Н.Новгород; fluff13@yandex.ru

В работах [1], [2] с помощью метода дополнительного аргумента были установлены условия локальной разрешимости в исходных координатах "одноосной"задачи Коши:

$$a(x,y,z)\partial_1 z + b(x,y,z)\partial_2 z = f(x,y,z),$$
$$z|_{x=0} = \phi(y), \quad y \in (-\infty;+\infty), \quad x \in [0;X]$$

без использования предположений о поведении характеристик. В [4], [5] был рассмотрен случай, когда линия L, несущая данные Коши, задается параметрическими уравнениями $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, в связи с чем задача Коши ставилась следующим образом: $z|_L = \gamma(t)$. В работах [9], [10] рассмотрена задача:

$$a_1(x_1,x_2,z)\partial_1 z + a_2(x_1,x_2,z)\partial_2 z = f(x_1,x_2,z),$$
$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty;+\infty).$$

В некоторых из статей [1] — [10] при доказательстве локальной разрешимости задачи Коши не удается достичь того, чтобы гладкость полученного решения была не ниже, чем гладкость начальной функции. При исследовании задачи (1.1) – (1.2) такая гладкость была получена. Будем называть локальную разрешимость задачи Коши, в которой полученное решение имеет гладкость не ниже, чем гладкость начальной функции регулярной локальной разрешимостью задачи Коши.

Продифференцируем уравнение (1.1) по x_1:

$$\partial^2_{x_1x_2}u + u\partial^2_{x_1x_1}u + (\partial_{x_1}u)^2 = -U(x_1,x_2,u)\partial_{x_1}u - \partial_{x_1}U(x_1,x_2,u)\cdot u - \partial_u U(x_1,x_2,u)\cdot u\cdot\partial_{x_1}u.$$

Введем обозначения:

$$q = \partial_{x_1}u,\ U_1 = \partial_{x_1}U,\ U_2 = \partial_u U. \tag{1.3}$$

Тогда предыдущее уравнение перепишется в виде:

$$\partial_{x_2}q + u\partial_{x_1}q = -q^2 - U(x_1,x_2,u)q - U_1(x_1,x_2,u)\cdot u - U_2(x_1,x_2,u)\cdot u\cdot q, \tag{1.4}$$

С учетом (1.3) зададим начальное условие для функции $q(x_1,x_2)$:

$$q(x_1,x_2)|_L = \gamma'(x_1). \tag{1.5}$$

Введем обозначение:

$$A\left(x_1,x_2,\right) = U\left(x_1,x_2,u\right) + U_2\left(x_1,x_2,u\right)\cdot u.$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид:

$$\partial_{x_2}q + u\partial_{x_1}q = -q^2 - A(x_1,x_2,u)q - U_1(x_1,x_2,u)\cdot u. \tag{1.6}$$

В рамках метода дополнительного аргумента [3] запишем для задачи (1.1),(1.2),(1.5),(1.6) расширенную характеристическую систему:

$$\frac{d\eta_1}{ds} = V, \tag{1.7}$$

$$\frac{d\eta_2}{ds} = 1, \tag{1.8}$$

$$\frac{dV}{ds} = -U\left(\eta_1,\eta_2,V\right)\cdot V \tag{1.9}$$

$$\frac{dW}{ds} = -W^2 - A(\eta_1, \eta_2, V) \cdot W - U_1(\eta_1, \eta_2, V) \cdot V \tag{1.10}$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2, V|_L = \gamma(\eta_1(0, x_1, x_2)), W|_L = \gamma'(\eta_1(0, x_1, x_2)). \tag{1.11}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2)$, $\eta_1(s, x_1, x_2)$, $\eta_2(s, x_1, x_2)$, $V(s, x_1, x_2)$, $W(s, x_1, x_2)$ — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным, s – дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Значение ω на кривой, заданной уравнением $x_2 = \phi(x_1)$ полагаем равной нулю, то есть $\omega(x_1, \phi(x_1)) = 0$.

Для получения решения в исходных координатах решения уравнений (1.7), (1.8) должны иметь возможность быть представленными в виде:

$$\begin{gathered} \eta_1 = x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \\ \eta_2 = x_2 - \omega(x_1, x_2) + s. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Представление (1.12) оправдано, если можно определить новую заранее неизвестную функцию $\theta(x_1, x_2)$, для которой в некоторой области изменения ее аргументов были бы справедливы соотношения:

$$\begin{gathered} \theta\left(x_1, x_2\right) = x_1 - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} V(\delta, x_1, x_2) d\delta, \\ \varphi\left(\theta\left(x_1, x_2\right)\right) = x_2 - \omega\left(x_1, x_2\right). \end{gathered} \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.9)–(1.11) при допустимости (1.12):

$$V(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s U(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), V(\delta, x_1, x_2)) V(\delta, x_1, x_2) d\delta. \tag{1.14}$$

А из соотношений (1.10)–(1.11) при допустимости (1.12):

$$W(s, x_1, x_2) = \gamma'(\theta(x_1, x_2)) - \int\limits_0^s \Big(W^2 + A(\eta_1, \eta_2, V) \cdot W + U_1(\eta_1, \eta_2, V) \cdot V\Big)\, d\delta. \tag{1.15}$$

Л е м м а 1.1. *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (1.12), (1.14), (1.15), (1.11) *дает решение задачи Коши* (1.1)–(1.2).

Аналогичная лемма доказывается в работе [4]. В ней было выведено основное условие разрешимости. Получим такое условие для нашей задачи. Для вывода этого условия проведем следующие выкладки: продифференцируем первое и второе уравнение (1.13) по x_1 и x_2. Получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 1 - V(\omega, x_1, x_2)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \frac{\partial V}{\partial x_1} d\delta, \\ \frac{\partial\theta}{\partial x_2} = -V(\omega, x_1, x_2)\frac{\partial\omega}{\partial x_2} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \frac{\partial V}{\partial x_2} d\delta. \end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \phi' \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \\ \phi' \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= 1 - \frac{\partial \omega}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Умножим первое уравнение системы (1.16) на $u(x_1, x_2) = V(\omega, x_1, x_2)$ и сложим со вторым. Будем иметь:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + u\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = u - V(\omega, x_1, x_2)\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + u\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right) - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} + u\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) d\delta. \tag{1.18}$$

Умножим первое уравнение системы (1.17) на $u(x_1, x_2) = V(\omega, x_1, x_2)$ и сложим со вторым. Получим:

$$\phi'\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + u\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) = 1 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + u\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right). \tag{1.19}$$

Обозначим

$$\underline{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}.$$

Мы получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \underline{\theta} + u\,(\underline{\omega} - 1) &= -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \underline{V} d\delta, \\ \phi'\underline{\theta} + (\underline{\omega} - 1) &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Система (1.20) разрешима, когда

$$J = \begin{vmatrix} 1 & u \\ \phi' & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.21}$$

Доказано, что решение задачи (1.1)–(1.2) дает решение системы уравнений (1.14)–(1.15) и наоборот, что непрерывно дифференцируемое решение задачи (1.14)–(1.15) при $s = \omega(x_1, x_2)$ будет решением задачи (1.1)–(1.2).

Лемма 1.2. *Пусть* $\gamma \in \overline{C}^2(\mathbb{R}^1)$, $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \overline{C}^{0,2,2}(R(\Omega_\beta K))$, *причем* $|\omega|$ *и* K *подобраны таким образом, что выполняется неравенство*

$$N_\gamma + |\omega| M(K) \leqslant K.$$

Тогда при $0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega^*$, *где* $\omega^* = \min\{l(K)l_1; l(K)M_4(K)\}$ *система уравнений* (1.14) – (1.15) *имеет единственное решение* $V(s, x_1, x_2)$, $W(s, x_1, x_2) \in C(Q)$.

Наметим основные этапы доказательства. Чтобы доказать существование решения системы (1.14)–(1.15), воспользуемся методом последовательных приближений. За начальные условия приняты функции $\mu_1^0(s, x_1, x_2) = 0$, $\mu_2^0(s, x_1, x_2) = 0$, $V^0(s, x_1, x_2) = \gamma(x_1)$, $W^0(s, x_1, x_2) = \gamma'(x_1)$, а остальные определены из рекуррентной системы:

$$\begin{aligned} &V^n(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta^n(x_1, x_2)) - \\ &- \int\limits_0^s U(x_1 - \mu_1^{n-1}(\delta, x_1, x_2), x_2 - \mu_2^{n-1}(\delta, x_1, x_2), V^{n-1}(\delta, x_1, x_2)) V^{n-1}(\delta, x_1, x_2) d\delta, \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$W^n(s,x_1,x_2)=\gamma'(\theta^n(x_1,x_2))-\int\limits_0^s\Big((W^{n-1})^2+A(x_1-\mu_1^{n-1},x_2-\mu_2^{n-1},V^{n-1})\cdot W^{n-1}+$$
$$+U_1(x_1-\mu_1^{n-1},x_2-\mu_2^{n-1},V^{n-1})\cdot V^{n-1}\Big)d\delta,\quad(1.23)$$

$$\theta^n\left(x_1,x_2\right)=x_1-\int\limits_0^{x_2-\varphi(\theta^n(x_1,x_2))}V^{n-1}(\delta,x_1,x_2)d\delta,\quad(1.24)$$

$$\omega^n(x_1,x_2)=x_2-\varphi(\theta^n(x_1,x_2)),\quad(1.25)$$

$$\mu_1^n(s,x_1,x_2)=\int\limits_s^{\omega^n(x_1,x_2)}V^{n-1}(\delta,x_1,x_2)d\delta,\quad(1.26)$$

$$\mu_2^n(s,x_1,x_2)=\omega^n(x_1,x_2)-s,\quad(1.27)$$

где $\mu_1^n=x_1-\eta_1^n$, $\mu_2^n=x_2-\eta_2^n$.
Доказана ограниченность последовательных приближений (1.22). Чтобы доказать сходимость последовательных приближений (1.22), рассмотрим разности $n+1$–го и n–го приближений. Так как в правой части уравнения (1.22) в аргументе функции γ содержится функция θ^n, а в аргументе функции U содержаться функции μ_1^{n-1}, μ_2^{n-1}, нам придется так же рассмотреть разности $n+1$–го и n–го приближений для функций θ^n, μ_1^n, μ_2^n.
Оценив полученные выражения, сложив их и введя обозначения:

$$\tilde V^n=colon\big(\mu_1^n,\mu_2^n,V^n\big),\ \left\|\tilde V^{n+1}-\tilde V^n\right\|=\left\|\mu_1^{n+1}-\mu_1^n\right\|+\left\|\mu_2^{n+1}-\mu_2^n\right\|+\left\|V^{n+1}-V^n\right\|,$$
$$l_1=\max\left\{M_1(K),\ M_2(K),\ \frac{M_3(K)(1-N_\phi K)+N_\gamma+N_\phi+1}{1-N_\phi K}\right\},\ l(K)=\frac{K-N_\gamma}{M(K)}$$

будем иметь:

$$\left\|\tilde V^{n+1}-\tilde V^n\right\|\leqslant l(K)l_1\left\|\tilde V^n-\tilde V^{n-1}\right\|,\quad(1.28)$$

где $l(K)l_1<1$, а $M(K)$, $M_1(K)$, $M_2(K)$, $M_3(K)$, N_ϕ, N_γ – положительные константы.
Введем обозначения: $I_1=\|(\mu_1^0,\mu_2^0,V^0)\|$, $I_2=\|(\mu_1^1,\mu_2^1,V^1)\|$, тогда

$$\left\|\tilde V^0\right\|\leqslant I_1,\ldots,\left\|\tilde V^i-\tilde V^{i-1}\right\|\leqslant(l(K)l_1)^{i-1}I_2,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Имеем для ряда $\tilde V^0+\tilde V^1-\tilde V^0+\tilde V^2-\tilde V^1+\ldots+\tilde V^n-\tilde V^{n-1}+\ldots$ оценку его частичной суммы:

$$\left\|\tilde V^n\right\|\leqslant\left\|\tilde V^0\right\|+\left\|\tilde V^1-\tilde V^0\right\|+\left\|\tilde V^2-\tilde V^1\right\|+...+\left\|\tilde V^n-\tilde V^{n-1}\right\|\leqslant$$
$$\leqslant I_1+I_2\left(1+l(K)l_1+(l(K)l_1)^2+\ldots+(l(K)l_1)^{n-1}\right),$$
$$\left\|\tilde V^n\right\|\leqslant I_1+\frac{I_2}{1-l(K)l_1}.$$

Это значит, частичная сумма $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\tilde V^i$ сходится к функции $\psi_1\in C(Q)$ по норме этого пространства.
Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (1.22), получим, что функция $V(s,x_1,x_2)$

будет удовлетворять уравнению (1.14). Единственность следует из того факта, что для разности двух возможных решений V_I и V_{II} будет выполняться неравенство вида (1.28), то есть $\|V_{II}-V_I\| \leqslant l(K)l_1\|V_{II}-V_I\|$, где $l(K)l_1<1$.
Аналогично доказывается существование уравнения (1.15).

Лемма 1.3. *При выполнении условий леммы 2* $V(s,x_1,x_2) \in \overline{C}^{1,2,1}(Q)$, $W(s,x_1,x_2)\in\overline{C}^{1,1,1}(Q)$.

Наметим основные этапы доказательства. Чтобы доказать существование, непрерывность и ограниченность частной производной по x_2 у функции $V(s,x_1,x_2)$, продифференцируем по x_2 соотношение (1.22), определяющее последовательные приближения для $V(s,x_1,x_2)$. Так как в аргументах функций, содержащихся в правой части уравнения (1.22), присутствуют функции $\theta^n(x_1,x_2)$, μ_1^{n-1}, μ_2^{n-1}, продифференцируем так же по x_2 соотношения (1.24), (1.26), (1.27) с учетом (1.25). Оценив выражения для $\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, сложив их и введя обозначения:

$$\hat{\hat{V}}^n=\left\|\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}\right\|+\left\|1-\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}\right\|+\left\|\frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right\|,\ N_1=\frac{K(N_\gamma+N_\varphi+1)}{1-N_\varphi K},$$

будем иметь: $\hat{\hat{V}}^n\leqslant N_1+l(K)l_1\hat{\hat{V}}^{n-1}$.
В силу того, что $\frac{\partial\mu_1^0}{\partial x_2}=0,\ 1-\frac{\partial\mu_2^0}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial V^0}{\partial x_2}=0$, то $\hat{\hat{V}}^0=1$, поэтому

$$\hat{\hat{V}}^1\leqslant N_1+l(K)l_1,$$
$$\dots$$
$$\hat{\hat{V}}^n\leqslant N_1\left(1+l(K)l_1+(l(K)l_1)^2+\ldots+(l(K)l_1)^{n-1}\right)+(l(K)l_1)^n.$$

Из последнего неравенства будем иметь: $\hat{\hat{V}}^n\leqslant\dfrac{N_1}{1-l(K)l_1}+(l(K)l_1)^n$.

Так как $l(K)l_1<1$, то и $(l(K)l_1)^n<1$. Этим мы получили, что $\hat{\hat{V}}^n$ – ограничена, а, следовательно, ограничены и $\left\|\frac{\partial\mu_1^n}{\partial x_2}\right\|$, $\left\|1-\frac{\partial\mu_2^n}{\partial x_2}\right\|$, $\left\|\frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right\|$.
Чтобы доказать сходимость $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$ к $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, рассмотрим линейные интегральные уравнения относительно неизвестных функций $E_1(s,x_1,x_2)$, $E_2(s,x_1,x_2)$, $E_3(s,x_1,x_2)$, $E_4(x_1,x_2)$:

$$E_1(s,x_1,x_2)=\gamma'(\theta)\cdot E_4-\int\limits_0^s\big(\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_1\cdot E_2+$$
$$+\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_2\cdot E_3+\langle U(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)V\rangle_3\cdot E_1\big)d\delta, \tag{1.29}$$

$$E_4(x_1,x_2)=-V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)\cdot(1-\varphi'(\theta)\cdot E_4)-\int\limits_0^{x_2-\varphi(\theta)}E_1d\delta, \tag{1.30}$$

$$E_3(s,x_1,x_2)=\varphi'(\theta)\cdot E_4, \tag{1.31}$$

$$E_2(s,x_1,x_2)=-V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)\cdot(1-\varphi'(\theta)\cdot E_4)-\int\limits_s^{x_2-\varphi(\theta)}E_1d\delta. \tag{1.32}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается, что уравнение (1.29), а, следовательно и уравнения (1.30)–(1.32) имеет решение, принадлежащее пространству

$C(Q)$. Оценив разности $E_1 - \frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $E_2 - (-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2})$, $E_1 - (1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2})$, $E_4 - \frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$ и, подставив выражение для $E_4 - \frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$ в $E_1 - \frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $E_2 - (-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2})$, $E_1 - (1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2})$, сложим оставшиеся выражения и введем обозначения: $\nu = colon\,(E_2, E_3, E_1)$, $\nu^n = colon\left(\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2}, 1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial V^n}{\partial x_2}\right)$, будем иметь:

$$\|\nu - \nu^n\| \leqslant l(K)l_1 \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + E_n.$$

В силу ограниченности $\frac{\partial V^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \theta^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2}$, $1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2}$, сходимости $V^n \to V$, $\theta^n \to \theta$, $\mu_1^n \to \mu_1$, $\mu_2^n \to \mu_2$ при всех n $\forall \epsilon > 0$ $\exists N$ такое, что $\forall n \geqslant N$ $\|E_n\| < \epsilon$.
Предыдущее неравенство примет вид:

$$\|\nu - \nu^n\| \leqslant l(K)l_1 \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + \epsilon.$$

Так как $l(K)l_1 < 1$, то для любого $p > 0$ будем иметь:

$$\left\|\nu - \nu^{n+p}\right\| \leqslant (l(K)l_1)^{p+1} \left\|\nu - \nu^{n-1}\right\| + \frac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}.$$

Переходя к пределу, будем иметь: $\|\nu - \nu^{n+p}\| \leqslant \dfrac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}$. В силу того, что $l(K)l_1 < 1$ $\forall \sigma > 0\ \exists \widetilde{N}\ \forall p > \widetilde{N}$ будет $\|\nu - \nu^{n+p}\| \leqslant \sigma$, где $\sigma = \dfrac{\epsilon}{1 - l(K)l_1}$.
Этим мы доказали, что $\frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to E_1$ при $n \to \infty$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial V^n}{\partial x_1}$ сходится к некоторой функции $e_1 \in C(Q)$.
В результате для последовательности V^n установлены следующие свойства:

$$V^n \to V,\ \frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to E_1,\ \frac{\partial V^n}{\partial x_1} \to e_1 \,\text{при}\, n \to \infty.$$

Имеем, что $V^n \in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходятся по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что $V \in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладает частными производными по s, x_1, x_2, причем $\frac{\partial V^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial V}{\partial x_2} \equiv E_1$, $\frac{\partial V^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial V}{\partial x_1} \equiv e_1$.
Также мы доказали, что μ_1^n, $\mu_2^n \in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходятся по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что μ_1, $\mu_2 \in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладают частными производными по s, x_1, x_2, причем $-\frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_2} \to -\frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \equiv E_2$, $1 - \frac{\partial \mu_1^n}{\partial x_1} \to$ $\to 1 - \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} \equiv e_2$, $1 - \frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_2} \to 1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} \equiv E_3$, $-\frac{\partial \mu_2^n}{\partial x_1} \to -\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} \equiv e_3$.
Аналогичные рассуждения проводятся при доказательстве существования, непрерывности, ограниченности частных производных сначала по x_2, а потом и по x_1 для функции $W(s, x_1, x_2)$. В ходе доказательства установлена сходимость $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}$ к $\frac{\partial W}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial W^n}{\partial x_1}$ к $\frac{\partial W}{\partial x_1}$. Функции $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial W^n}{\partial x_1}$ получены дифференцированием (1.15) по x_2 и по x_1. Чтобы несколько облегчить доказательство сходимости, рассматриваются линейные интегральные уравнения:

$$G(s, x_1, x_2) = \gamma''(\theta(x_1, x_2)) \cdot E_4 - \int\limits_0^s \Big(2W \cdot G + \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_1 \cdot E_2 +$$
$$+ \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_2 \cdot E_3 + \langle A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot W\rangle_3 \cdot E_1 +$$
$$+ A(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot G + \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_1 \cdot E_2 +$$
$$+ \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_2 \cdot E_3 + \langle U_1(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, V) \cdot V\rangle_3 \cdot E_1\Big) d\delta,$$

$$g(s,x_1,x_2)=\gamma''(\theta(x_1,x_2))\cdot e_4-\int_0^s\Big(2W\cdot g+\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_1\cdot e_2+$$
$$+\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_2\cdot e_3+\langle A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot W\rangle_3\cdot e_1+$$
$$+A(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot g+\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_1\cdot e_2+$$
$$+\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_2\cdot e_3+\langle U_1(x_1-\mu_1,x_2-\mu_2,V)\cdot V\rangle_3\cdot e_1\Big)d\delta.$$

Для последовательности $\{W^n\}$ установлены следующие свойства:

$$W^n\to W,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_2}\to G,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_1}\to g\,\text{при}\,n\to\infty.$$

Доказано, что $W^n\in C^{1,1,1}(Q)$ при любом n сходится по норме этого пространства. В силу полноты и замкнутости $C^{1,1,1}(Q)$ имеем, что $W\in C^{1,1,1}(Q)$, а, значит, обладает частными производными по s,x_1,x_2, причем $\frac{\partial W^n}{\partial x_2}\to\frac{\partial W}{\partial x_2}\equiv G,\ \frac{\partial W^n}{\partial x_1}\to\frac{\partial W}{\partial x_1}\equiv g$.
Таким образом для всех $0\leqslant s\leqslant\omega\leqslant\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty$:

$$|V(s,x_1,x_2)|\leqslant K,\ |W(s,x_1,x_2)|\leqslant K,\ \left|\frac{\partial V(s,x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant N_V^{x_2},\ \left|\frac{\partial V(s,x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant N_V^{x_1},$$
$$\left|\frac{\partial W(s,x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant\frac{N_2}{1-l(K)M_4(K)},\ \left|\frac{\partial W(s,x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{N_4}{1-l(K)M_4(K)}.$$

Функция $u(x_1,x_2)=V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)$ будет искомым решением задачи Коши (1.1)–(1.2), а функция $q(x_1,x_2)=W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)$ будет удовлетворять задаче Коши (1.4)–(1.5) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (1.6)–(1.5). А также

$$|u(x_1,x_2)|=|V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)|=|V(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)|\leqslant K,$$
$$|q(x_1,x_2)|=|W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)|=|W(x_2-\varphi(\theta),x_1,x_2)|\leqslant K,$$
$$\left|\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|=\left|\frac{\partial V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant N_V^{x_2},\ \left|\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|=\left|\frac{\partial V(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant N_V^{x_1},$$
$$\left|\frac{\partial q(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|=\left|\frac{\partial W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|\leqslant\frac{N_2}{1-l(K)M_4(K)},$$
$$\left|\frac{\partial q(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|=\left|\frac{\partial W(\omega(x_1,x_2),x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|\leqslant\frac{N_4}{1-l(K)M_4(K)}$$

для всех $(x_1,x_2)\in\Omega_0$ где $\Omega_0=\{(x_1,x_2):0\leqslant\omega\leqslant\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty\}$. Учитывая, что $\omega=x_2-\varphi(\theta)$, будем иметь: $\Omega_0=\{(x_1,x_2):\varphi(\theta)\leqslant x_2\leqslant\varphi(\theta)+\omega^*,\ -\infty<x_1<+\infty\}$, где $\omega^*=\min\{l(K)l_1;l(K)M_4(K)\}$.
Таким образом, мы получили, что $u\in\overline{C}^{1,1}(\Omega_0),\ q\in\overline{C}^{1,1}(\Omega_0)$. Следующим этапом является доказательство что существуют $\partial^2_{x_1x_1}u$ и $\partial^2_{x_1x_2}u$, но на $\gamma(x_1)$ не используется больше, чем $\gamma\in\overline{C}^2(\mathbb{R})$.Доказательство основано на методе последовательных приближений. Доказана ограниченность $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2},\ \dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}$. Установлено, что $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2}$ сходится к некоторой функции Y_1, а $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}$ к y_1. В результате, получено, $\dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1^2}\to\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1^2}\equiv Y_1,\ \dfrac{\partial^2V^n}{\partial x_1x_2}\to\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1x_2}\equiv y_1$ и $\dfrac{\partial^2V}{\partial x_1^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2},\ \dfrac{\partial^2V}{\partial x_1x_2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1x_2}$.

Докажем, что $\partial_{x_2} u = q$.Для этого продифференцируем уравнение (1.1) по x_1 :

$$\partial^2_{x_1x_2}u+(\partial_{x_1}u)^2+u\partial^2_{x_1x_1}u = -\partial_{x_1}U(x_1,x_2,u)\cdot u-\partial_u U(x_1,x_2,u)\cdot\partial_{x_1}u\cdot u-U(x_1,x_2,u)\partial_{x_1}u. \tag{1.33}$$

Взяв разность (1.33) и (1.4) и обозначив $\partial_{x_1}u = c,\ c-q = z,\ H = -c-q-U(x_1,x_2,u)-$ $-u\cdot U_2(x_1,x_2,u)$ для функции z получим систему:

$$\begin{cases}\partial_{x_2}z + u\partial_{x_1}z = Hz,\\ z|_L = 0.\end{cases}$$

Из полученной системы найдем, что функция $z = c-q \equiv 0$, а, следовательно, $c = q$. Таким образом, доказано, что $\partial_{x_1}u = q$. Так как $c = q,\ \partial_{x_1}c = \partial_{x_1}q$, то $\partial^2_{x_1x_1}u = \partial_{x_1}q$. Доказана теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\gamma(x_1)\in\overline{C}^2(-\infty,+\infty), U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\overline{C}^{2,1,2}(R(\Omega_\beta K))$, *где* $R(\Omega_\beta K) = \Omega_\beta\times[K;K]$, $K = 10N_\gamma$ *- произвольно зафиксированное положительное число;* L *— однонаправлено регулярная кривая* $x_2 = \phi(x_1)$ *; выполнено основное условие разрешимости* $|J|\geq K_J$ *, где* $J = 1-\phi' u$ *.Тогда при* $0\leqslant|\omega|\leqslant\omega^*$ *, где*
$\omega^* = \min\{l(K)l_1; l(K)M_4(K); l(K)l_3\}$ *, где*

$$l_1 = \max\left\{M_1(K), M_2(K), \frac{1+M_3(K)(1-N_\varphi K)+N_\phi+N_\gamma}{(1-N_\phi K)}\right\},$$
$$l_3 = \max\left\{P_1(K),\ P_2(K),\ \frac{N_\gamma+N_\varphi+1+P_3(K)(1-N_\phi K)}{1-N_\phi K}\right\},$$

задача Коши (1.1) — (1.2) *имеет единственное решение* $u(x_1,x_2)\in\overline{C}^{2,1}(Q)$ *, которое при* $s=\omega$ *совпадает с функцией* $V(s,x_1,x_2)$ *, определяемой из системы* (1.12), (1.14), (1.15), (1.11).

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной"задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

2. Алексеенко С. Н., “Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в "одноосной"задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2010, № 12, 51–57.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “Условия целесообразности применения метода дополнительного аргумента к квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка в частных производных общего вида”, *Асимптотические топологические и компьютерные методы в математике*, Труды межд. научн. конф. посвящ. 70-летию академика М. И. Иманалиева (Бишкек, КГНУ), Сер.3. Естеств. и техн. науки, Матем. науки. Информ. и инф. технологии, Вестник КГНУ, 2001, 6–7.

4. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

5. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Доказательство локальной разрешимости резольвентной системы интегральных уравнений, соответствующей квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных.”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2012, № 14, 41–51.

6. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. АН*, **329**:5 (1993), 543–546.

7. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

8. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

9. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.

10. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 27–37.

Proof of regular local solvability of the Cauchy problem for differential equations in partial derivatives of the first order with initial data in Cartesian coordinates on line infinite length

© **L. E. Platonova**[2]

Abstract. The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation is studied in case when initial data is given on an infinite length smooth line with non-vertical gradient. A system of integral equations, a solution of which gives a solution of the considered Cauchy problem in original coordinates and the solution has the same smoothness that the initial function, is constructed. Local solvability conditions, which do not include in itself assumptions about behavior of the characteristic lines, are presented in a theorem which proved here.

Key Words: quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument

[2] The senior lecturer of the mathematics and mathematical education chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; fluff13@yandex.ru