УДК 517.9

Синтез стабилизирующего управления в дискретных системах без выходов

© Е. А. Кудашова[1]

Аннотация. В работе предлагается решение задачи стабилизации класса нестационарных нелинейных дискретных систем без выходов. Решение задачи стабилизации продемонстрировано на системах второго и третьего порядков.

Ключевые слова: стабилизация, дискретные системы, синтез управления, функции Ляпунова.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются вопросы численного конструирования стабилизирующего управления на основе теорем об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы.[1]

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу глобальной стабилизации неавтономных нелинейных системы без выходов вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + g(n, x(n))u(n), \tag{2.1}$$

Причем рассматриваемая система будет системой без потерь с положительно определенной функцией Ляпунова $V(n,x):\quad \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ и обратной связью $\alpha(n, x(n)):$ $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, такой что выходное отображение $y = y(n, x(n), u(n)):\ \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to$ $\mathbb{R}^m$ является линейным по $u = u(n)$.

Определим

$$\widehat{\Omega}_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^m:\ V(n_0 + i + 1, f^{i+1}_{\alpha_{n_0}}(x)) - V(n_0 + i, f^i_{\alpha_{n_0}}(x)) = 0\ \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^m:\ \left.\frac{\partial V(n_0 = i+1, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta = f^{i+1}_{\alpha_{n0}}(x)} g(n_0 + i, f^i_{\alpha_{n_0}}(x)) = 0\ \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

где $f_a(n,x) = f(n,x) + g(n,x)\alpha(n,x)$.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что для системы* (2.1) *существует закон обратной связи* $\alpha(n,x)$, $\alpha(n,0) \equiv 0$, *дважды непрерывно дифференцируемая положительно определенная, допускающая бесконечно малый верхний предел функция Ляпунова такая, что* $V(n+1, f_\alpha(n,x)) - V(n,x) \le 0$, *выполнены условия:*

[1] Аспирантка кафедры информациоонной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; katherine.kudashova@yandex.ru

1) $V(n+1, f(n,x)+g(n,x)u)$ *квадратична по* u

2) $V(n,x)$ *выпукла и* $\left.\frac{\partial^2 V(n+1,\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=f_\alpha(n,x)} \geq 0$

3) $S_\alpha \cap \widehat{\Omega}_\alpha = \{0\}$ *для исходных и предельных функций*

то система (3.1) *глобально стабилизируема посредством обратной связи:*

$$u(n) = \alpha(n,x(n)) - \left(I + \frac{1}{2}g^T(n,x(n)) \left.\frac{\partial^2 V(n+1,\beta)}{\partial\beta^2}\right|_{\beta=f_\alpha(n,x(n))} g(n,x(n))\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\left.\frac{\partial V(n+1,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=f_\alpha(n,x(n))} g(n,x(n))\right)^T$$

С л е д с т в и е 2.1. *Рассмотрим систему вида*

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n,x(n))u(n) \tag{2.2}$$

Предположим, что существует положительно определенная ограниченная матрица $P(n) \in \mathbb{R}^{m\times m}: \quad A^T(n)P(n+1)A(n) - P(n) \leq 0$. *Пусть* S_A *и* Ω_A *обозначают множества:*

$$S_A = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \; x^T \left(\prod_{n=n_0}^{n_0+i+1} A(n)\right)^T P(n_0+i+1)g\left(n_0+i, \prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x\right) = 0 \quad \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+\right\}$$

$$\Omega_A = \Big\{x \in \mathbb{R}^m : \; \left(\textstyle\prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x\right)^T (A^T(n_0+i)P(n_0+i+1)A(n_0+i) -$$
$$-P(n_0+i)) \textstyle\prod_{n=n_0}^{n_0+i} A(n)x = 0 \; \forall i, n_0 \in \mathbb{Z}_+\Big\}$$

Если $S_A \cap \Omega_A = \{0\}$ *для исходных и предельных матриц, то система* (2.2) *глобально стабилизируема посредством обратной связи*

$$u(n) = -\left(I + \frac{1}{2}g^T(n,x(n))P(n+1)g(n,x(n))\right)^{-1} g^T(n,x(n))P(n+1)A(n)x(n) \tag{2.3}$$

3. Применение методики на примерах

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_2(n) + 2(\sqrt{1+x_1^2(n)} - 1)u(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n) \end{cases} \tag{3.1}$$

Очевидно, матрицы линейного приближения имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ничего нельзя сказать из линейного приближения, так как здесь проблема стабилизации является критической. Более того, можно заметить, что к этой системе не может быть применен принцип сжимающих отображений.

С другой стороны, рассматривая функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^T Px$, *где* $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ *- положительно определенная, ограниченная матрица, для которой выполняется* $A^T(n)P(n+1)A(n) - P(n) \le 0$.

Можно видеть, что

$$V(Ax) = V(x)\,,\ V(Ax) = \ = \tfrac{1}{2}(Ax)^T P(Ax) = \tfrac{1}{2}x^T A^T PAx\,.$$

Найдем множество S_A *, состоящее из* x *таких, что* $x^T A(n)^T P(n+1) g\,(n, A(n)x) = 0$ *и* x *таких, что* $x^T (A(n+1))^T P(n+1) g\,(n, A(n)x) = 0$

Проведем непосредственные вычисления. Согласно следствию 2.2 получим:

$$(Ax)^T Pg(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{1+x_1^2} - 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 - \sqrt{2}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot 2\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = \left(-x_2 - \tfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \tfrac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = ,$$
$$= -\tfrac{2x_1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+x_1^2} - 1\right) = 0$$

что влечет $x_1 = 0$ *и*

$$0 = (A^2x)^T Pg(Ax) \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 2\left(\sqrt{1+x_2^2} - 1\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1 + \sqrt{2}x_2 & x_2 - \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} 2\left(\sqrt{1+x_2^2} - 1\right) ,$$

что влечет $x_2 = 0$.

Следовательно множество $S_A = \{0\}$. *По следствию 2.2 система* (3.1) *глобально равномерно стабилизируема посредством управления вида* (2.3) *с неполной обратной связью, без включения в управление компоненты* $x_2(n)$ *фазового вектора:*

$$u(n) = \frac{\sqrt{2}x_1(n)\left(\sqrt{1+x_2^2(n)} - 1\right)}{5 + 2x_1^2(n) - 4\sqrt{1+x_1^2(n)}}\,.$$

П р и м е р 3.2. *Рассмотрим нелинейную дискретную систему третьего порядка с векторным управлением*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n)x_3(n) + \frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x_3(n)u_1(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n)\sin x_2(n) - x_3^2(n) + u_2, \\ x_3(n+1) = -x_3(n)\sin x_1(n). \end{cases} \tag{3.2}$$

Согласно теореме 2.1 выберем закон обратной связи, исключающий компоненту x_3 *в первых двух уравнениях*

$$\alpha(n,x) = \begin{pmatrix} -x_1(n)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \\ x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(n,0) \equiv 0,$$

Тогда управление в исходной системе можно представить как

$$u(n,x) = \alpha(n,x) + \tilde{u}(n,x)$$

А сама система примед вид

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \frac{x_2(n)}{1+x_1^2(n)} + x_3(n)\tilde{u}_1(n), \\ x_2(n+1) = x_1(n)\sin x_2(n) + \tilde{u}_2, \\ x_3(n+1) = -x_3(n)\sin x_1(n). \end{cases}$$

В этом случае, преобразованная система (3.2) *будет иметь вид:*

$$x(n+1) = f_\alpha(x(n)) + g(x(n))\tilde{u}(n),$$

Где $f_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2} \\ x_1 \sin x_2 \\ -x_3 \sin x_1 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Из теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению следует, что система (3.2) *локально стабилизируема. Покажем, что система* (3.2) *может быть не только локально, но и глобально стабилизируема.*

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. *Полагая* $V(f_\alpha(x)) = V(x)$, *имеем*

$$\frac{x_2^2}{1+x_1^2} + x_1^2 \sin^2 x_2 + x_3^2 \sin^2 x_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

1)$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ *или*

2)$x_1 = 0 \Rightarrow (x_3 = 0$ *и* $x_2 \in \mathbb{R})$.

В первом случае все очевидно. Рассмотрим подробнее второй случай. Заметим, что в этом случае $\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big|_{\theta=f_\alpha} g(x) = 0$ *имеет вид*

$(\frac{x_2^2}{1+x_1^2} + x_1^2 \sin^2 x_2 + x_3^2 \sin^2 x_1) \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$ *что влечет* $\begin{cases} \frac{x_2 x_3}{1+x_1^2} = 0, \\ x_1 \sin x_2 = 0 \end{cases}$

Что дает те же самые решения $x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$. *Непосредственные вычисления показывают, что*

$$f_\alpha^2(x) = f_\alpha(f_\alpha(x)) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 \sin x_2}{1+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2}} \\ \frac{x_2}{1+x_1^2}\sin(x_1 \sin x_2) \\ x_3 \sin x_1 \sin \frac{x_2}{1+x_1^2} \end{pmatrix}, g(f_\alpha(x)) = \begin{pmatrix} -x_3 \sin x_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 \cos^2 x_2 + x_3^2 \cos^2 x_1 + x_2^2(\frac{1}{1+x_1^2}) = 0$$

Используя соотношение $V(f_\alpha^2(x)) = V(f_\alpha(x)) = V(x)$, *получаем*
или

$$x_2^2\left(1 - \frac{\sin^2(x_1 \sin x_2)}{(1+x_1^2)^2}\right) = 0.$$

Так как $x_1 = 0$ $x_3 = 0$, *то это влечет* $x_2 = 0$. *Следовательно, в любом случае имеем* $S_\alpha \cap \widehat{\Omega}_\alpha = \{0\}$. *Итак, система* (3.2) *может быть глобально стабилизируема (решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво) посредством следующего непрерывно дифференцируемого по переменным состояния векторного управления с обратной связью:*

$$u(n,x(n)) = \alpha(n,x(n)) - \left(I + \frac{1}{2}g^T(n,x(n))g(n,x(n))\right)^{-1} g^T(n,x(n)) f_\alpha(n,x(n)) =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1(n)\left(1-\frac{1}{n+2}\right) - \frac{2x_2(n)x_3(n)}{(x_3^2(n)+2)(x_1^2(n)+1)} \\ x_3^2(n) - \frac{2}{3}x_1(n)\sin x_2(n) \end{pmatrix}$$

4. Заключение

Развитие методики для автономных систем в непрерывном времени дано в статье [2]. Представленные результаты для дискретныч нестационарныч нелинейныч систем непосредственно примыкают к результатам работ [1],[2]. Однако, перспективным предметом исследования является получение аналогичных результатов для непрерывных систем.

Список литературы

1. Богданов А. Ю., Кудашова Е. А., “Численные методы синтеза управления в нестационарных дискретных системах”, *Ученые записки УлГУ. Математика и информационные технологии*, 2010, № 1(3), 9–18.

2. Byrnes C. I., Lin W., “Losslessness, feedback equivalence and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems”, *IEEE Trans. on Aut. Control.*, 1994, № 39(1), 83–98.

On stabilization of discrete systems without outputs

© **E. A. Kudashova**[2]

Abstract. This paper focuses on a question of stabilization of nonstationary nonlinear discrete systems without outputs. The application of stabilization technique is demonstrated on the second and third orders systems.

Key Words: stabilization, discrete systems, Lyapounov direct method.

[2] PhD-student of Information Security and Control Theory department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk;katherine.kudashova@yandex.ru