

УДК 517.9

Аналитическое решение задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности

© С. В. Гулакова¹, В. Н. Попов²

Аннотация. В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности (задачи Крамерса). В качестве основного уравнения используется линейризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на обтекаемой газом поверхности – модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений коэффициента аккомодации тенгенциального импульса молекул газа вычислена скорость изотермического скольжения газа вдоль поверхности и построены профили массовой скорости. Выполнено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий

1. Введение

В классической гидродинамике в качестве граничного условия на обтекаемых газом поверхностях используются так называемые граничные условия «прилипания», которые предполагают равенство скорости газа вблизи обтекаемой поверхности скорости самой поверхности. В действительности это условие носит приближенный характер и применимо лишь в том случае, когда длину свободного пробега молекул газа можно считать сколь угодно малой, что не выполняется, в частности, для разреженных газов. Вместо того чтобы полностью «прилипнуть» к обтекаемой поверхности, разреженный газ сохраняет около нее некоторую, хотя и малую скорость, т.е. возникает скольжение газа вдоль поверхности [1]. В случае постоянства температуры газа это явление получило название изотермического скольжения. Экспериментально явление изотермического скольжения было обнаружено в 1875 году Кундтом и Варбургом при исследовании движения разреженного газа по трубам [2]. Как показали результаты проведенных Кундтом и Варбургом исследований, скорость скольжения оказалась пропорциональной градиенту массовой скорости вне слоя Кнудсена (тонкого слоя газа непосредственно прилегающего к поверхности, толщина которого имеет порядок средней длины свободного пробега молекул газа). Таким образом, для не слишком больших градиентов массовой скорости газа скорость изотермического скольжения определяется выражением [1]

$$u_0 = C_m \frac{du_\tau}{dx'_n}. \quad (1.1)$$

Здесь u_τ – касательная к обтекаемой поверхности компонента массовой скорости газа, x'_n – нормальная к поверхности координата. Коэффициент C_m называется коэффициентом изотермического скольжения.

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; s.gulakova@narfu.ru.

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

Решению задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности посвящено значительное число работ. Обзор наиболее ранних, выполненных с использованием различных приближенных методов, можно найти в [3]. Более поздних (в том числе и с использованием точных аналитических решений) – в [4]. При этом в большинстве упомянутых выше работ решение задачи ограничивалось вычислением коэффициента изотермического скольжения, входящего в (1.1) для случая диффузного отражения молекул газа обтекаемой поверхностью. Исключение составляют работы [4] – [6], в которых помимо значения коэффициента изотермического скольжения построен профиль скорости газа. В [4] аналитические решения задачи найдены с использованием метода Кейза (метода разложения решения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения) и метода аппроксимирующих функций. В первом случае в качестве граничного условия на стенке использовалась модель диффузного отражения молекул газа, во втором – зеркально-диффузного. В [5] и [6] решение построено методом дискретных ординат, а в качестве граничного условия принималась модель зеркально-диффузного отражения. В представленной работе в качестве метода решения использовано обобщение метода Кейза, предложенное в [7], а в качестве граничного условия на стенке принята модель зеркально-диффузного отражения.

2. Вывод основных уравнений

Рассмотрим газ, заполняющий полупространство $x' > 0$, ограниченное стенкой, расположенной в плоскости $x' = 0$. Ось Oz' направим вдоль массовой скорости газа. Предположим, что газ неоднороден из-за градиента z -компоненты массовой скорости вдоль оси x' , причем градиент скорости стремится к константе при $x' \rightarrow +\infty$.

В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, будем использовать БГК модель кинетического уравнения Больцмана, которая в выбранной системе координат записывается в виде [4]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.1)$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесная функция распределения, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа.

Будем полагать, что отклонение состояния газа мало отличается от равновесного. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) [1 + C_z Z(x, C_x)]. \quad (2.2)$$

Здесь $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)[1 + 2C_z U_0 + 2C_z G_v(x - C_x)]$ – функция распределения молекул газа вдали от стенки; $f(C) = n_0 (\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан с параметрами, заданными на стенке; $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $x = x'/l_g$ безразмерная координата; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа; G_v – безразмерный градиент скорости газа; U_0 – искомая скорость скольжения газа.

Подставляя (2.2) в (2.1) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Граничные условия для $Z(x, \mu)$ записываются в виде

$$Z(0, \mu) = (1 - q)Z(0, -\mu) - 2qU_0 + 2G_v\mu(2 - q), \quad \mu > 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (2.5)$$

Здесь q – коэффициент аккомодации стенкой тангенциального импульса молекул газа.

Таким образом, вычисление скорости изотермического скольжения и построение профиля массовой скорости газа над стенкой сводится к решению краевой задачи (2.3) – (2.5).

3. Построение функции распределения молекул газа

Общее решение (2.3) имеет вид [4]

$$Z(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (3.1)$$

Здесь

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mu^2) d\mu}{\mu - z}, \quad (3.2)$$

$P(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, а A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

С учетом граничного условия (2.5) находим $A_0 = 0$, $A_1 = 0$. Подставляя далее (3.1) в граничное условие (2.4), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) a(\mu) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad (3.3)$$

$$f(\mu) = -2qU_0 + 2G_v\mu(2 - q) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \quad (3.4)$$

Решение (3.3) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (3.5)$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой, выполняются соотношения

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu a(\mu), \quad 0 < \mu < +\infty, \quad (3.6)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (3.7)$$

Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (3.2), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (3.8)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (3.9)$$

С учетом (3.4) и (3.6) – (3.9) сведем сингулярное интегральное уравнение (3.3) к краевой задаче Римана

$$\begin{aligned} [N^+(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2 - q)]\lambda^+(\mu) - [N^-(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2 - q)]\lambda^-(\mu) = \\ = 2i(1 - q)\mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Особенность краевой задачи (3.10) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в нуль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}$$

и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости.

Решение этой задачи имеет вид [4]:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(\theta(\tau) - \pi) d\tau}{\tau - z} \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} \left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)} \right).$$

С учетом решения задачи факторизации перепишем (3.10)

$$\begin{aligned} [N^+(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2 - q)]X^+(\mu) - [N^-(\mu) + 2qU_0 - 2G_v\mu(2 - q)]X^-(\mu) = \\ = \frac{2i(1 - q)X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.11) функций, ее общее решение по формулам Сохоцкого имеет вид

$$\begin{aligned} N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - \\ - 2qU_0 + 2G_v z(2 - q) + \frac{P_n(z)}{X(z)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $P_n(z)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами, степень которого будет определена ниже.

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (3.12), в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} = \\ = -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) d\mu \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \frac{1}{X(z)} = z + Q_1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) d\mu \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - \\ - 2qU_0 + 2G_v z(2-q) + P_n(z)(z + Q_1) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Здесь

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2) d\eta$$

– интегралы Лоялки, в частности, $Q_1 = -1.01619$.

Воспользовавшись интегральным представлением факторизующей функции

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \quad (3.14)$$

и изменив в выражении (3.13) порядок интегрирования, перепишем его в виде

$$N(z) = -\frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - 2qU_0 + 2G_v z(2-q) + P_n(z)(z + Q_1) + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (3.15)$$

Так как функция $N(z)$ согласно (3.5) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение $N(z) = O(1/z)$. Отсюда, с учетом (3.15) необходимо положить $P_n(z) = C_0$.

Тогда, приравнявая в (3.15) коэффициенты при одинаковых степенях z , находим

$$\begin{aligned} C_0 = -2(2-q)G_v, \\ U_0 = -\frac{1}{q} \left[(2-q)G_v Q_1 + \frac{1-q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) d\eta \right]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (3.1) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.6), предварительно преобразовав (3.12).

Учитывая, что

$$\frac{1}{\mu - z} \frac{1}{\eta + \mu} = \frac{1}{\eta + z} \left[\frac{1}{\mu - z} - \frac{1}{\mu + \eta} \right],$$

перепишем (3.12) в виде

$$\begin{aligned} N(z) = \frac{1}{X(z)} & \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + z} - \right. \\ & \left. - \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu + \eta} \right] - \\ & - 2qU_0 + 2G_v z(2 - q) - \frac{2(2 - q)G_v}{X(z)}, \end{aligned}$$

или, с учетом (3.14)

$$\begin{aligned} N(z) = -\frac{2}{X(z)} & \left[(2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right] - \\ & - 2qU_0 + 2G_v z(2 - q) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + z}. \end{aligned}$$

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$\begin{aligned} N^+(\mu) - N^-(\mu) & = -2 \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \left[(2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right] = \\ & = \frac{2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \left[(2 - q)G_v + \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.6) для нахождения $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu) \left[(2 - q)G_v + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad \mu > 0. \quad (3.17)$$

Здесь

$$h(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}, \quad \lambda = \frac{1 - q}{2\sqrt{\pi}}.$$

Решение (3.17) ищем в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим

$$\begin{aligned} a_0(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu), & a_1(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu}, \\ a_2(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \\ a_k(\mu) &= (2-q)G_v h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dots \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\ g(\eta) &= \eta X(-\eta)h(\eta). \end{aligned}$$

Подставляя (3.18) в (3.16) с учетом полученных результатов, можем записать

$$U_0 = -\frac{(2-q)G_v}{q} \left[Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right], \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta, & I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta}, \\ I_k &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0 , A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (3.1) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

4. Вычисление профиля массовой скорости газа

Скорость газа над стенкой находим, исходя из статистического смысла построенной функции распределения

$$\begin{aligned} U_z(x) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 [2U_0 + 2G_v x + Z(x, C_x)] d^3 C = \\ &= U_0 + G_v x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z(x, \mu) d\mu = U_0 + G_v x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) d\eta = \\ &= \left[-\frac{2-q}{q} \left[Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right] + x + (2-q) \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^k J_k(x) \right] G_v. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Здесь

$$J_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta,$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta},$$

$$J_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta}, \dots \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$\gamma(x, \eta) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) h(\eta).$$

В случае линейной экстраполяции профиля массовой скорости газа на стенку

$$U_z(x) = \left[x - \frac{2-q}{q} \left[Q_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right] \right] G_v. \tag{4.2}$$

Профили массовой скорости газа $U_z(x)$, отнесенные к градиенту массовой скорости, для различных значений коэффициента аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) и (4.2) приведены на Рисунке 1.

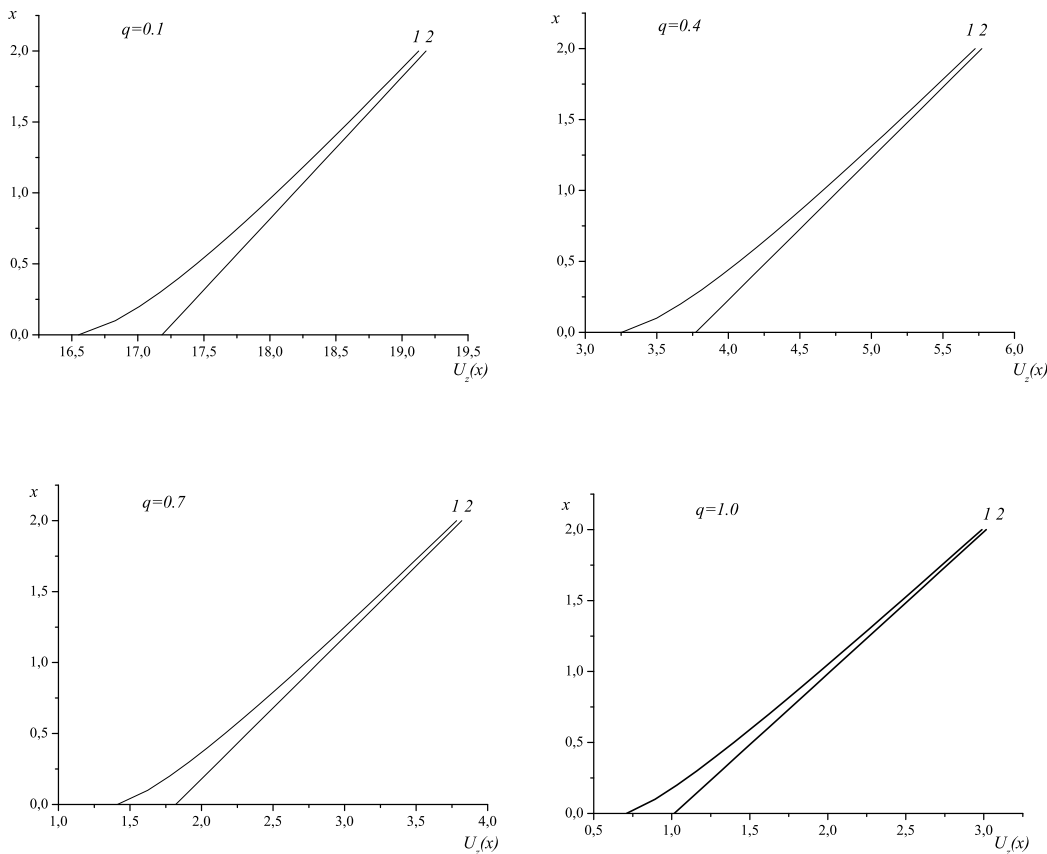


Рис. 1. Графики зависимости $U_z(x)/G_v$ для различных значений q : 1 – рассчитанные согласно (4.1), 2 – согласно (4.2).

Как видно из приведенных рисунков при уменьшении значения коэффициента аккомодации профиль массовой скорости в слое Кнудсена, рассчитанный согласно (4.1) все существеннее отличается от того, что получается на основе (4.2).

Значения скорости скольжения U_0 , рассчитанные согласно (3.19), приведены в Таблице 1. Там же приведены значения, полученные в [4] – [6] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер (LBE), модели кинетического уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) и БГК модели (BGK).

q	(4.1)	BGK [4]	BGK [6]	CES [5]	LBE [5]
0.1	17.11708	17.09809	17.10313	17.04462	17.0478
0.2	8.22973	8.220481	8.224902	8.169615	8.17248
0.3	5.257268	5.251263	5.255112	5.203049	5.20563
0.4	3.763664	3.759290	3.762619	3.713778	3.71609
0.5	2.861707	2.858334	2.86119	2.815562	2.81761
0.6	2.255662	2.252980	2.25541	2.212984	2.21178
0.7	1.818786	1.816621	1.818667	1.779429	1.78048
0.8	1.487706	1.485952	1.487654	1.451586	1.45292
0.9	1.227215	1.225801	1.227198	1.194247	1.19540
1.0	1.01619	1.015064	1.01619	0.9864009	0.987328

Таблица 1. Значения U_0/G_v при различных значениях q .

Как видно из приведенной таблицы, отличие значений скорости изотермического скольжения, полученных в представленной работе, не превышает 0.1% от аналогичных значений, найденных в [4], [6] в рамках БГК модели. Отличие от аналогичных результатов, полученных в рамках CES и LBE моделей, составляет от 3% при $q = 1$ до 0,4% при $q = 0.1$, и обусловлено зависимостью значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений, отмеченной в [8].

5. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов в виде ряда Неймана построено решение задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. Для произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа получены аналитические выражения для профиля скорости газа и скорости изотермического скольжения. Проведен численный анализ полученных выражений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
2. Kundt A., Warburg E. Ueber reibung und waermeleitung verduennter gase // Poggendorfs Annalen der Physik. 1875. Vol. 155. P. 337–525.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. - 440 с.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.

5. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273–303.
6. Siewert C.E., Sharipov F. Model equation in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Physics Fluids. 2002. V. 14. No 12. P. 4123–2129.
7. Попов В., Юшканов А. Лукашев В.В. Математическое моделирование процессов переноса в каналах. Монография. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co. KG. 2014. 116 с.
8. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УрО РАН. 2008. 230 с.

Analytic solution of the Kramers problem

© S. V. Gulakova³, V. N. Popov⁴

Abstract. In the framework of kinetic approach the analytic solution (in the form of a series Neumann) of the problem of isothermal slip gas along a hard, flat surface (Kramers's problem) is built. The linearized BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann's kinetic equation as the main equation and the model of mirror-diffuse reflection as boundary conditions on the surface are used. For different values of the coefficient of diffusely the speed of isothermal slip gas along the surface is calculated and the profiles of mass velocity are built. The comparison with similar results, published in the open press is done.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

³ Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; s.gulakova@narfu.ru.

⁴ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.