

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

Методы теории ветвления и катастроф в задаче об изгибе удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа

© Т. Е. Бадюкина¹, Ю. Б. Русак²

Аннотация. Рассматривается задача о вычислении разветвляющихся решений нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего прогиб удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой (растягиваемой) внешними краевыми усилиями. Строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым отклонениям от критических значений бифуркационных параметров рядов. Фредгольмовость линейризованной спектральной задачи доказывается построением соответствующей функции Грина, которое для задач такого типа выполнено впервые.

Ключевые слова: прогиб пластины, аэроупругость, бифуркация, уравнение разветвления.

Статические задачи потери устойчивости заключаются в нахождении таких значений бифуркационных параметров, при которых система может совершить скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое. В этом случае происходит переход параметров через некоторое критическое значений, при этом меняется качественная картина решений уравнений, описывающих деформацию упругих тел. В окрестности критических значений бифуркационных параметров возможно несколько решений, т.е. несколько положений равновесия обтекаемого тела.

Математическая модель задачи о прогибе удлиненной упруго опёртой пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой / растягиваемой внешними краевыми усилиями, описывается классом двухточечных краевых задач [1], [2] для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка:

$$\chi^2 \left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'' - Tw'' + \beta_0 w + \varepsilon_3 q(x) = kK(w', M, \kappa) + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1] dx \quad (1.1)$$

Здесь $w = w(x)$ — прогиб пластины, $0 \leq x_1 \leq d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $x = \frac{x_1}{d}$, $0 \leq x \leq 1$ — прямоугольные координаты; $K(w', M, \kappa) = 1 - [1 + \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ — при одностороннем обтекании, $K(w', M, \kappa) = [1 - \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - [1 + \frac{\kappa-1}{2} Mw']^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ — при двустороннем; $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T = \frac{qd}{Eh}$, $\theta = \frac{1}{1-\mu^2}$ и $k = \frac{p_0 d}{Eh}$, где d — ширина пластины, h — её толщина, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $M = \frac{v}{c_\infty}$ — число Маха (v — скорость потока газа, c_∞ — скорость звука в невозмущенном газе), κ — показатель политропы, p_0 — давление, β_0 — коэффициент жесткости основания, $\varepsilon_3 q(x)$ — малая нормальная нагрузка. Интегральное слагаемое учитывает дополнительное усилие в срединной плоскости при прогибе.

¹ Ассистент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, г. Саранск; badokinate@gmail.com.

² Австралийский национальный университет, г.Канберра, Австралия; igrusak@gmail.com.

В окрестностях критических значений бифуркационных параметров (сжимающее (растягивающее) усилие $T = T_0 + \varepsilon_1$, число Маха $M = M_0 + \varepsilon_2$) для вычисления малых изгибных форм применяются методы теории бифуркаций [3]. Зависимость дифференциального уравнения от бифуркационных параметров выражается через корни соответствующих характеристических уравнений линеаризации, которые можно считать заданными точно. Равенство нулю определителя матрицы граничных условий позволяет определить критические бифуркационные поверхности и кривые [5], [6], в окрестностях точек которых строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым параметрам рядов, и, тем самым, решить бифуркационную задачу о прогибе пластины в точной постановке. Наибольшие трудности возникают при исследовании линеаризованной спектральной задачи, фредгольмовость которой, доказывается построением соответствующей функции Грина, выполненным по схеме монографии [4].

В известных нам работах к бифуркационным задачам аэроупругости, как правило, применялся метод Галеркина. Методами теории бифуркаций задача о прогибе прямоугольной пластины исследована в работе [7]. Прогиб удлиненной пластины при учёте только одного бифуркационного параметра - числа Маха - в работах П.А.Вельмисова и Б.В.Логонова [8], П.А. Вельмисова и С.В.Киреева [9], в которых применялся метод групповых преобразований Ц.На, позволяющий сводить двухточечные граничные задачи для ОДУ четвёртого порядка к задаче Коши.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bx = R(x, \lambda), \quad R(0, 0) = 0, \quad R'(0, 0) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $B : E_1 \rightarrow E_2$ - замкнутый фредгольмов оператор ($R(B) = \overline{R(B)}$, $R(B)$ - область значений оператора B) с плотной в E_1 областью определения $D(B)$, $N(B) = span\{\varphi(x)\}$ - его подпространство нулей, $N^*(B) = span\{\psi(x)\}$ - дефектное подпространство. Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ предполагается определённым и достаточно гладким по x и λ в окрестности $(0, 0) \in E_1 + \Lambda$, Λ - пространство параметров. По теореме Хана-Банаха существуют биортогональные системы $\{\gamma_j\}_1^n \in E_1$, $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ и $\{z_k\}_1^n \in E_2$, $\langle z_k, \psi_l \rangle = \delta_{kl}$ (здесь и далее $\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x)b(x)dx$), порождающие проекторы $P = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j : E_1 \rightarrow N(B)$, $Q = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j : E_2 \rightarrow E_{2,n} = span\{z_1, \dots, z_n\}$ и разложение банаховых пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^n + E_1^{\infty-n}$, $E_1^n = N(B)$, $E_2 = E_{2,n} + E_{2,\infty-n}$, $E_{2,\infty-n} = R(B)$. Тогда метод Ляпунова-Шмидта позволяет свести задачу (1.2) к построению малых решений нелинейной конечномерной системы, называемой уравнением разветвления (УР). Действительно, согласно лемме Э. Шмидта, оператор $\tilde{B} = B + \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$ непрерывно обратим, и уравнение (1.2) может быть записано в виде системы

$$\tilde{B}x = R(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i, \quad \xi_i = \langle x, \gamma_i \rangle, \quad i = \overline{1, n} \tag{1.3}$$

По теореме о неявных операторах первое уравнение (1.3) имеет единственное решение $x = x(\xi, \lambda)$, подстановка которого во второе даёт УР:

$$f(\xi, \lambda) \equiv \xi_i - \langle x(\xi, \lambda), \gamma_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.2) и (1.4) имеют одно и то же число малых решений, которые представимы в виде рядов по одинаковым дробным степеням малых параметров в малых окрестностях точек бифуркации.

В работе метод Ляпунова-Шмидта применяется к нелинейной задаче в окрестностях критических значений параметров T_0 , M_0 и $\varepsilon_3 = 0$.

Применение регуляризатора Шмидта [3] к уравнению (1.1) в разложении аналитической нелинейности:

$$Bw \equiv \chi^2 w^{(4)} - T_0 w'' + \sigma_0 w' + \beta_0 w = \chi^2 \left(\frac{3}{2} w'^2 w^{(4)} + 3w''^3 + 9w'w''w''' \right) - \varepsilon_3 q(x) + \varepsilon_1 w'' + \\ + \xi z^{(1)} - 1(2)k\kappa w' \varepsilon_2 + \frac{\theta}{2} w'' \int_0^1 w'^2 dx - \left\{ \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0 \varepsilon_2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{12} M_0^3 w'^3 + \dots \right. \\ \left. - \frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0^3 w'^3 \right.$$

(верхняя(нижняя) строка отвечает одностороннему(двустороннему) обтеканию пластины потоком газа, $\sigma_0 = 1(2)k\kappa M_0$), позволяет записать его в виде системы $\tilde{B}w = R(w, \varepsilon) + \xi z$, $\xi - \langle w, \gamma \rangle = 0$. Здесь $\tilde{B} = B + \langle \cdot, \varepsilon \rangle z$, γ и z - биортогональные системы к $\varphi \in N(B)$ и $\psi \in N^*(B)$ соответственно, $\tilde{B}^{-1} = \Gamma$, существующий согласно лемме Шмидта [3], при этом $\Gamma z = \varphi$, $\Gamma^* \gamma = \psi$.

Линеаризованное в точке ветвления уравнение (1.1) определяет фредгольмов оператор $B : C^{4+\alpha}[0, 1] \rightarrow C^\alpha[0, 1]$ с одномерным подпространством нулей $N(B) = \text{span}\{\varphi(x)\}$ и одномерным дефектным подпространством $N^*(B) = \text{span}\{\psi(x)\}$.

При отсутствии малой нормальной нагрузки $\varepsilon_3 q(x) = 0$ решение первого уравнения (1.3) представляется в виде ряда

$$\omega = \omega_{100}\xi + \omega_{010}\varepsilon_1 + \omega_{001}\varepsilon_2 + \omega_{110}\xi\varepsilon_1 + \omega_{101}\xi\varepsilon_2 + \omega_{011}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \omega_{200}\xi^2 + \omega_{020}\varepsilon_1^2 + \omega_{002}\varepsilon_2^2 + \dots$$

подстановка которого во второе даёт УР.

В случае одностороннего обтекания пластины УР

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{200}^1 \xi^2 + L_{110}^1 \xi \varepsilon_1 + L_{101}^1 \xi \varepsilon_2 = 0$$

определяет асимптотику разветвляющихся решений

$$w(x) = -\frac{L_{110}^1 \varepsilon_1 + L_{101}^1 \varepsilon_2}{L_{200}^1} \varphi(x) + o(|\varepsilon|),$$

для двустороннего обтекания

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{300}^2 \xi^3 + L_{110}^2 \xi \varepsilon_1 + L_{101}^2 \xi \varepsilon_2 = 0$$

и

$$w(x) = \pm \sqrt{-\frac{L_{110}^2 \varepsilon_1 + L_{101}^2 \varepsilon_2}{L_{300}^2}} \varphi(x) + O(|\varepsilon|),$$

где знаки ε_1 , ε_2 определяются неотрицательностью подкоренного выражения.

Таким образом, для одностороннего обтекания пластины имеет место транскритическая бифуркация, при одностороннем - бифуркация типа "вилки".

Коэффициенты УР вычисляются согласно [3] по методу неопределённых коэффициентов Назарова-Некрасова

$$L_{110}^1 = \int_0^1 \varphi'' \psi dx, L_{101}^1 = -k\kappa \int_0^1 \varphi' \psi dx, L_{200}^1 = -\frac{k\kappa(\kappa+1)M_0^2}{4} \int_0^1 \varphi'^2 \psi dx$$

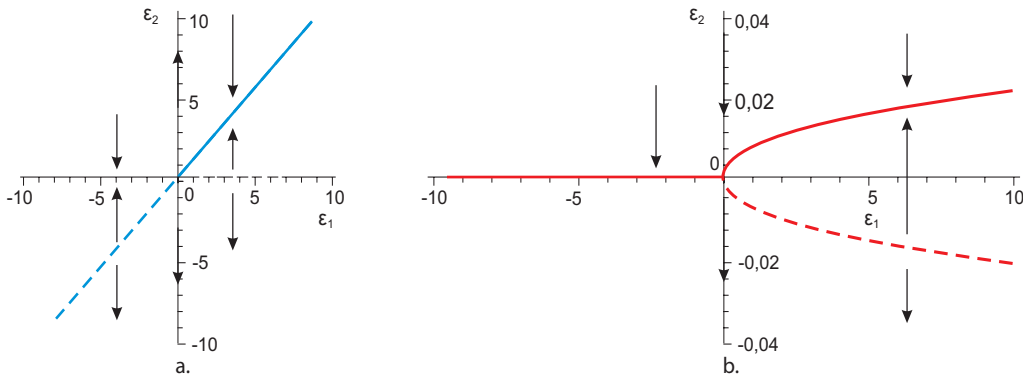


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма: а.транскритическая бифуркация; б.бифуркация типа «вилки»

при одностороннем обтекании, и

$$L_{110}^2 = \int_0^1 \varphi'' \psi dx = L_{110}^1, L_{101}^2 = -2k\kappa \int_0^1 \varphi' \psi dx = 2L_{101}^1, L_{200}^2 = 0,$$

$$L_{300}^2 = 3\chi^2 \int_0^1 \varphi''^3 \psi dx + \frac{3}{2}\chi^2 \int_0^1 \varphi^{(4)} \varphi'^2 \psi dx + 9\chi^2 \int_0^1 \varphi' \varphi'' \varphi''' \psi dx$$

$$- \frac{1}{6}k\kappa(\kappa + 1)M_0^3 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \frac{1}{2}\theta \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx \int_0^1 \varphi'' \psi dx$$

для двустороннего. Коэффициенты уравнений разветвления в случае дивергенции, определяемом равенством нулю матрицы граничных условий, вычислены при использовании Maple 12, и в силу ограниченного объёма здесь не приводятся.

В общем случае ненулевой нормальной нагрузки ($\varepsilon_3 \neq 0$) и отсутствии сжимающего/растягивающего усилия ($T = 0$), построенное методом Ляпунова-Шмидта [3], уравнение разветвления имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = L_{300}\xi^3 + L_{101}\xi\varepsilon_1 + L_{010}\varepsilon_3 + \dots = 0$$

Составляя результат главной части УР и её производной по ξ , получаем приближённую кривую разветвления:

$$4L_{101}\varepsilon_1^3 + 27L_{010}^2L_{300}\varepsilon_3^2 = 0 \tag{1.5}$$

Так как коэффициенты L_{101} , L_{010} , L_{300} положительны, то полукубическая парабола (1.5) касается оси абсцисс ε_1 и лежит по левую сторону от оси ε_3 . Слева от кривой разветвления УР имеет три вещественных малых решения $\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\xi_{\pm}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, два из которых (ξ_{\pm}) совпадают на этой кривой, а справа - одно $\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

В [3] УР с помощью замены переменных

$$\eta = L_{010}^{1/3}L_{300}^{-1/3}\varepsilon_3^{1/3}, \omega = L_{101}\varepsilon_1L_{300}^{-1/3}(L_{010}\varepsilon_3)^{-2/3}$$

преобразуется к уравнению с одним параметром

$$1 + \omega\eta + \eta^3 \simeq 0$$

для которого точкой ветвления является $\omega = -3 \cdot 2^{-2/3}$, $\eta = 2^{-1/3}$, т.е. уравнение кривой разветвления может быть записано в виде $\omega \simeq -3 \cdot 2^{-2/3}$. В [3] построена следующая асимптотика решений $\xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ УР, а тем самым и решений исходной задачи :

$$w \simeq \xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} \xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq (4L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3)^{1/3} \\ \xi_{\pm}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq \sqrt[3]{L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3} \left[2^{-1/3} \mp \sqrt{3 \cdot 2^{-2/3} + L_{101}\varepsilon_1(L_{010}\varepsilon_3)^{-2/3}L_{300}^{-1/3}} \right] \end{aligned}$$

в окрестности кривой разветвления, т.е. при $\varepsilon_1\varepsilon_3^{-2/3} \rightarrow -\frac{3}{2^{2/3}}L_{010}^{2/3}L_{300}^{1/3}L_{101}^{-1}$; $\xi_{\pm} \simeq 2^{-1/3}(L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_3)^{1/3} = 3^{-1/2}L_{300}^{-1/2}(-L_{101}\varepsilon_1)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_3$, $\xi_0 = -2\xi_{\pm}$ на кривой разветвления (два решения совпадают);

$$\begin{aligned} \xi_{0,+}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq \mp L_{300}^{-1}(-L_{101}\varepsilon_1)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_3 \\ \xi_{-}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) &\simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3 \end{aligned}$$

при больших отрицательных значениях $\varepsilon_1\varepsilon_3^{-2/3}$;

$$\xi_0(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3$$

при больших положительных.

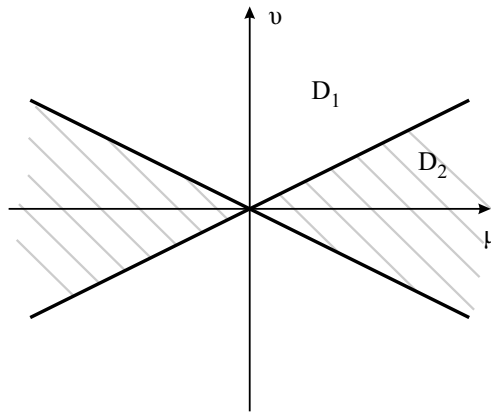


Рис. 2: График $\eta(\theta)$

Полученная картина поведения решений ε_{\pm} для $\varepsilon_3 > 0$ совпадает с картиной, описанной в [11] для другой задачи. Критическое значение числа Маха (точка бифуркации) уменьшается по сравнению со случаем $\varepsilon_3 = 0$:

$$M_{кр} \simeq M_* - 3 \cdot 2^{-2/3} \varepsilon_3^{2/3} L_{010}^{2/3} L_{300}^{1/3} L_{101}^{-1} \quad (1.6)$$

Формула (1.6) и вид функций ξ_{\pm} согласуется с графиками $\xi(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, приведёнными в [1] для конкретных значений ε_3 .

Для случая отсутствия сжимающего/растягивающего усилия ($T = 0$) и отсутствии малой нормальной нагрузки, решение (1.3) ищется в виде

$$w = w_{10}\xi + w_{01}\varepsilon_1 + w_{20}\xi^2 + w_{11}\varepsilon_1\xi + w_{02}\varepsilon_1^2 + \dots$$

При одностороннем обтекании пластины УР имеет вид

$$L_{11}\xi\varepsilon_1 + L_{20}\xi^2 + \dots = 0,$$

где $L_{11} = k\kappa(1(2)) \int_0^1 \varphi' \psi dx$, $L_{20} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0 \int_0^1 \varphi'^2 \psi dx$. При двухстороннем обтекании главная часть УР :

$$L_{30}\xi^3 + L_{11}\varepsilon_1 = 0$$

где $L_{30} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \chi^2 \int_0^1 (\frac{3}{2} \varphi'^2 \varphi^{(4)} \psi + 3 \varphi''^3 \psi + 9 \varphi' \varphi'' \varphi^{(2)} \psi) dx + \frac{\theta}{2} \int_0^1 \varphi'^2 dx \int \varphi'' \psi dx$.

Соответственно асимптотика разветвляющихся решений определяется формулами : $w(x) = -\frac{L_{11}}{L_{20}} \varepsilon_1 \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|)$ - для одностороннего обтекания и $w(x) = \pm \sqrt{\frac{L_{11}\varepsilon_1}{L_{30}}} \varphi(x) + O(|\varepsilon_1|)$ - для двустороннего, где $sign \varepsilon_1 = sign L_{11} L_{30}$ определяются неотрицательностью выражения под корнем. Значение коэффициентов разветвления не приводятся в силу их громоздкости.

В наиболее общем случае $T \neq 0$, $\varepsilon_3 q(x) \neq 0$ асимптотика разветвляющихся решений по трём малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в точке бифуркации $(T_0, M_0, 0)$ вычисляется для случаев существования бифуркационных многообразий, которые определяются равенством нулю определителя матрицы граничных условий.

Разыскание решения первого уравнения системы (1.3) в виде ряда

$$w = w_{1000}\xi + w_{0100}\varepsilon_1 + w_{0010}\varepsilon_2 + w_{0001}\varepsilon_3 + \sum_{k+|\alpha|>1} w_{k;\alpha} \xi^k \varepsilon^\alpha$$

с последующей подстановкой во второе, даёт разложение по ξ и ε уравнения разветвления Шмидта $L(\xi, \varepsilon) = \xi - \langle w(\xi, \varepsilon), \gamma \rangle = 0$.

Для одностороннего обтекания главная часть УР, определяемая методом диаграммы Ньютона[3] имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{2000}\xi^2 + L_{0001}\varepsilon_3 + L_{1001}\xi\varepsilon_3 + L_{1100}\xi\varepsilon_1 + L_{1010}\xi\varepsilon_2 + \dots = 0$$

$$L_{2000} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 \langle \varphi'^2, \psi \rangle, L_{0001} = -\langle q, \psi \rangle, L_{1100} = -\langle \varphi'', \psi \rangle, L_{1010} = k\kappa \langle \varphi', \psi \rangle, L_{1001} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0^2 \langle \varphi'(\Gamma q)', \psi \rangle.$$

При $L_{2000} \neq 0$ замена $\eta = \xi + \frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3}{L_{2000}}$ сводит УР к виду

$$\eta^2 + \alpha = 0,$$

где $\alpha = \frac{L_{0001} + L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2 + L_{0002}\varepsilon_3}{L_{2000}} \varepsilon_3 - \frac{(L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3)^2}{4L_{2000}}$. В окрестности точки ветвления $\xi = 0, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$ имеем $\eta = \pm \sqrt{-\alpha}$. Возвращаясь к $\xi, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3

$$w(x) = \left[-\frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3}{L_{2000}} \pm \left(\frac{(L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2 + L_{1001}\varepsilon_3)^2}{4L_{2000}} - \frac{L_{0001}\varepsilon_3 + (L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2)\varepsilon_3 + L_{0002}\varepsilon_3^2}{L_{2000}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|)$$

Для двустороннего обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа главная часть УР имеет вид:

$$L(\xi, \varepsilon) \equiv L_{3000}\xi^3 + L_{0001}\varepsilon_3 + L_{1100}\xi\varepsilon_1 + L_{1010}\xi\varepsilon_2 + L_{1001}\xi\varepsilon_3 + \dots = 0 \tag{1.7}$$

где $L_{3000} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0^3 \langle \varphi'^3, \psi \rangle - \chi^2 \langle \frac{3}{2} \varphi'^2 \varphi^{(4)} + 3\varphi''^3 + 9\varphi' \varphi'' \varphi''' \rangle, \psi \rangle - \frac{\theta}{2} \langle \varphi'' \int_0^1 \varphi'^2 dx, \psi \rangle$, $L_{2000} = 0$, $L_{0001} = -\langle q, \psi \rangle$, $L_{1001} = 0$, $L_{1100} = -\langle \varphi'', \psi \rangle$, $L_{1010} = \sigma_0 \langle \varphi', \psi \rangle$, $\sigma_0 = 2k\kappa M_0$.

При использовании замен $\alpha = \frac{L_{1100}\varepsilon_1 + L_{1010}\varepsilon_2}{L_{3000}}$ и $\beta = \frac{L_{0101}\varepsilon_1 + L_{0011}\varepsilon_2 + L_{0001}}{L_{3000}} \varepsilon_3$ при $L_{3000} \neq 0$, уравнение (1.7) переписывается в виде

$$L(\xi) \equiv \xi^3 + \xi\alpha + \beta \quad (1.8)$$

При $\alpha > 0$ уравнение не имеет вырождения, так как $L'(\xi) = 3\xi^2 + \alpha > 0$. Поэтому будем считать, что $\alpha = -\mu^2$ и $\beta = v^3$ и уравнение (1.8) сводится к

$$\xi^3 - \xi\mu^2 + v^3 = 0. \quad (1.9)$$

Дискриминантная кривая определяется решением системы

$$\begin{cases} \xi^3 - \xi\mu^2 + v^3 = 0 \\ 3\xi^2 - \mu^2 = 0 \end{cases}$$

которое имеет вид $\mu = \pm\sqrt{3}\xi$ и $v = 2^{1/3}\xi$, то есть $v = \pm B\mu$ ($B = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} < 1$).

Плоскость параметров (μ, v) разбивается на две области D_1 и D_2 . В области D_1 уравнение (1.9) имеет три решения, в области D_2 – одно решение. На границе областей – прямых $v = \pm B\mu$ – два решения.

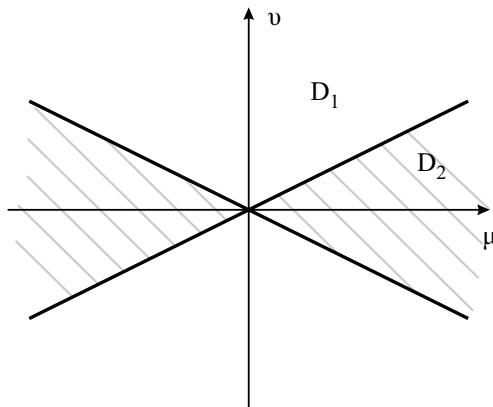


Рис. 3: Плоскость параметров (μ, v)

Рассмотрим области D_1 , в которой $|\frac{v}{\mu}| < 1$. Считая $v \neq 0$, разделим уравнение (1.9) на μ^3 и введем новые переменные $\eta = \frac{\xi}{\mu}$ и $\lambda = \frac{v}{\mu}$. Уравнение (1.9) переписывается в виде:

$$\eta^3 - \eta + \lambda^3 = 0$$

По теореме об обратной функции, η является аналитической функцией от λ^3 . Это уравнение имеет три решения, соответствующих значению $\lambda = 0$: $\eta = 0$, $\eta = 1$, $\eta = -1$.

Применение метода диаграмм Ньютона определяет асимптотику этих решений при малых значениях λ

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda^3 + \lambda^9 + 3\lambda^{15} + 12\lambda^{21} + O(|\lambda^{21}|) \\ \eta &= 1 - \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{8}\lambda^6 + O(|\lambda^6|) \\ \eta &= -1 + \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{8}\lambda^6 + O(|\lambda^6|) \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным ξ , μ и v , получаем разложение функции в ряд Тейлора-Лорана-Пуизе внутри некоторого угла с проколотой вершиной

$$\xi = \left(\frac{v}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{v}{\mu}\right)^9 + 3\left(\frac{v}{\mu}\right)^{15} + 12\left(\frac{v}{\mu}\right)^{21} + \dots$$

или

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^4} + 3\frac{\beta^5}{\alpha^7} + 12\frac{\beta^7}{\mu^{10}} + \dots$$

$$\xi = \mu - \frac{v^3}{2\mu^2} - \frac{3v^6}{8\mu^5} + \dots$$

или

$$\xi = (-\alpha)^{1/2} + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{3\beta^2}{8(-\alpha)^{5/2}} + \dots$$

$$\xi = -\mu - \frac{v^3}{2\mu^2} + \frac{3v^6}{8\mu^5} + \dots$$

или

$$\xi = -(-\alpha)^{1/2} + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{3\beta^2}{8(-\alpha)^{5/2}} + \dots$$

Аналогично, для нахождения асимптотики решения (1.9) в области D_2 , где $|\frac{\mu}{v}| < 1$, разделим уравнение на v^3 и введем замены $\eta = \frac{\xi}{v}$ и $\lambda = \frac{\mu}{v}$. Уравнение (1.9) переписется в виде

$$\eta^3 - \eta\lambda + 1 = 0$$

Это уравнение имеет одно решение, соответствующее $\lambda = 0$: $\eta = -1$. При достаточно малых значениях решение имеет асимптотику:

$$\eta = -1 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{81}\lambda^6 + \dots$$

или

$$\xi = -v + \frac{\mu^3}{3v^2} - \frac{\mu^6}{81v^4} + \dots$$

или

$$\xi = -\beta^{1/3} + \frac{(-\alpha)^{3/2}}{3\beta^{2/3}} - \frac{\alpha^3}{81\beta^{5/3}} + \dots$$

На прямых $v = \pm B\mu$, разделяющих области D_1 и D_2 , уравнение (1.9) имеет вид

$$\xi^3 - \xi\mu^2 \pm B^3\mu^3 = 0$$

Используя замену $\eta = \frac{\xi}{\mu}$, получаем два уравнения:

$$\eta^3 - \eta \pm B^3 = 0$$

каждое из которых имеет два решения $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ и $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, то есть $\xi = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\mu$ и $\xi = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\mu$ или $\xi \approx K(-\alpha)^{1/2}$

З а м е ч а н и е 1.1. При наличии сжимающего/растягивающего усилия и малой нормальной нагрузки функции $L(\xi, \varepsilon)$ и при одностороннем обтекании, и при двустороннем, не имеют в $(0, 0, 0, 0)$ особой точки, т.к. $L(0, 0, 0, 0) = 0$, но $dL(0, 0, 0, 0) \neq 0$, поскольку $\frac{\partial L(\xi, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_3} \neq 0$, поэтому катастрофа отсутствует. В каждом отдельном случае по выполненному исследованию УР и найденным его решениям не трудно выписать решение исходной нелинейной бифуркационной задачи.

Таким образом, в работе методами теории бифуркации и катастроф исследован класс задач о дивергенции удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа и в общем виде построена асимптотика разветвляющихся решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, ГИФМЛ, М., 1961, 339 с.
2. Вольмир А. С., *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, М., 1967, 984 с.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969, 524 с.
4. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 528 с.
5. Бадюкина Т. Е., Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Построение асимптотики решений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя бифуркационными параметрами”, *Известия Иркутского государственного университета*, 2012, № 1, 2–12.
6. Бадюкина Т. Е., “Бифуркационное множество в модельных задачах аэроупругости”, *Труды третьей международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (г.Брест, 17-22 сентября 2012 г.)*, 2012, 47–57.
7. Логинов Б. В., Кожевникова О. В., “Вычисление собственных изгибных форм и асимптотики разветвляющихся решений бифуркационной задачи о дивергенции пластины”, *Известия РАН*, 2:3 (1998), 112–120.
8. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., “Метод групповых преобразователей и ветвление решений в двухточечных граничных задачах аэроупругости”, *Дифференциальные уравнения и их приложения материалы Междунар. конф. (Саранск, 20-22 декабря 1994 г.)*, 1995, 120–125.
9. Вельмисов П. А., Киреев С. В., Кузнецов А. О., “Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа”, *Журнал "Вестник УлГТУ"*, 1 (1999), 44–51.
10. Бадюкина Т. Е., “Green functions construction for divergence problems in aeroelasticity”, *ROMAI Journal*, 4:2 (2008), 33–44.
11. Логинов, Б. В., “Задача о дивергенции крыла как пример теории ветвления решений нелинейных уравнений с двумя малыми параметрами”, *Дифференциальные уравнения и их приложения*, 1979, 109–113.

Methods of the theory of branching and catastrophes in the problem of divergence an elongated plate in a supersonic gas flow.

© T. E. Badokina³ Yu. B. Rousak⁴

Abstract. We consider the problem of computing the branching solutions of nonlinear eigen- value problem for an ordinary differential equation of the fourth order, describing the divergence of the elongated plate in a supersonic gas flow, compressible (stretchable) external boundary conditions and subjected to a small normal load. We construct the asymptotics of branching solutions in the form of convergent series in the small parameters. Fredholm property of the linearized spectral problem is proved by constructing the appropriate Green's function, which for this type of tasks performed for the first time.

Key Words: buckling, aeroelasticity, bifurcation, branching equation.

³ Assistent, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; badokinate@gmail.ru.

⁴ Canberra University, Australia; irousak@gmail.com