УДК 519.71

Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления

© В. В. Афонин[1], С. М. Мурюмин[2]

Аннотация. Работа посвящена анализу задачи оптимальной стабилизации линейным стационарным объектом. Показаны соотношения оптимальности, связывающие между собой параметры объекта и регулятора. Проверены численные эксперименты, подтверждающие полученные соотношения оптимальности.
Ключевые слова: управление, оптимальный регулятор, квадратичный функционал, модель.

1. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим вполне управляемую модель объекта в виде

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = AX(t) + BU(t), \tag{1.1}$$

Где X(t) - n-мерный вектор состояния, U(t) - r-мерный вектор управления, A – матрица состояния, матрица действительных чисел размера nxn, B – матрица входа, матрица действительных чисел размера nxr.

Предполагается, что на управления $u_j(t)(j = 1, 2, \ldots, r)$ ограничения не наложены. Управление должно быть выбрано так, чтобы при произвольном начальном условии X(0) минимизировать квадратичный функционал

$$J = [\int_0^\infty [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)]\, dt], \tag{1.2}$$

Где Q – положительно определенная симметрическая матрица действительных чисел размера nxn, R – положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера rxr, T – символ транспонирования [3].

Решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$U(t) = -R^(-1)B^T PX(t), \tag{1.3}$$

где P – (n?n) симметрическая матрица, положительно-определенное решение нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBR^(-1)B^T P + Q = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим:

$$K_p = R^(-1)B^T P.. \tag{1.5}$$

Тогда (1.3) перепишем

$$U(t) = -K_p X(t) \tag{1.6}$$

где K_p - постоянная матрица оптимального регулятора размера rxn.

Предполагается, что все переменные состояния доступны для измерения.

[1] Доцент кафедры АСОИУ, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; vvafonin53@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск.

Т е о р е м а 1.1. *задача* (1.1) - (1.2) *имеет решение, то*

$$R = B^T S^T Q S B + (E + B^T S^T K_p^T) R (E + K_p S B), \tag{1.7}$$

где $S = (A - BK_p)^(-1)$, E *– единичная матрица размера rxr.*

Формула (1.7) аналитически связывает между собой параметры объекта (матрицы A, B), весовые матрицы функционала Q, R и матрицу оптимального регулятора K_p [1,2].

1.2. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации вполне управляемого по выходу линейного объекта. К описанию объекта управления

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = AX(t) + BU, \tag{1.8}$$

добавляется уравнение выхода:

$$Y(t) = CX(t), \tag{1.9}$$

где Y(t) – m-мерный вектор выхода, C – матрица выхода, матрица действительных чисел размера mxn,mxn.

Необходимо найти управление такое, чтобы минимизировать квадратичный функционал вида

$$J = [\int_0^\infty [Y^T(t) Q_y Y(t) + U^T(t) R U(t)]\, dt], \tag{1.10}$$

где Q_y – положительно-определенная диагональная матрица действительных чисел размера mxm, R - положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера rxr, T – символ транспонирования [3].

Управление для минимизации функционала (1.10) имеет вид

$$U(t) = -R^(-1) B^T P_y X(t), \tag{1.11}$$

где P_y - постоянная симметрическая положительно-определенная матрица размера nxn, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения типа Риккати

$$R_y A + A^T P_y - P_y B R^(-1) B^T P_y + C^T Q_y C = 0 \tag{1.12}$$

Обозначим:

$$K_p y = R^(-1) B^T P_y. \tag{1.13}$$

С учетом (1.13) оптимальное управление (1.11) запишем в виде

$$U(t) = -K_p y X(t) \tag{1.14}$$

где $K_p y$ - матрица оптимального регулятора размера rxn.

Предполагается, что все переменные состояния и выхода доступны для измерения.

Т е о р е м а 1.2. *Если задача* (1.8) – (1.10) *имеет решение, то*

$$R = B^T S_y^T C^T Q_y C S_y B + (E + B^T S_y^T K_p y^T) R (E + K_p y S_y B), \tag{1.15}$$

где $S_y = (A - BK_p y)^(-1), E$ *– единичная матрица размера rxr.*

Т е о р е м а 1.3. *Если задача* (1.1), (1.2) *имеет решение, то матрица R квадратичного функционала находится (восстанавливается) из решения следующего уравнения Ляпунова [4]:*

$$M * R - R * N = C, \tag{1.16}$$

где $M = E_r + B^T S^T K^T, N = -(E_r + KSB)^(-1), C = -(B^T S^T QSB) * (E_r + +KSB)^(-1), S = (A - BK)^(- 1), E_r$ *- единичная матрица размером rxr, K – матрица оптимального регулятора, A, B- матрицы объекта управления, Q – матрица квадратичного функционала.*

Доказательство вытекает из решения уравнения (1.7) относительно искомой матрицы R.

Т е о р е м а 1.4. *Если задача* (1.8) – (1.10) *имеет решение, то матрица R квадратичного функционала находится (восстанавливается) из решения следующего уравнения Ляпунова:*

$$My * R - R * Ny = Cy, \tag{1.17}$$

где $My = E_r + B^T S_y^T K_y^T, Ny = -(E_r + K_y S_y B)^(- 1), Cy = -(B^T S_y^T C^T Q_y C S_y B) * (E_r + K_y S_y B)^(- 1), S_y = (A - BK_y)^(- 1), E_r$ *- единичная матрица размером rxr,* K_y *- матрица оптимального регулятора по выходу, A, B – матрицы объекта управления,* Q_y *- матрица квадратичного функционала* (1.10), *C – матрица выхода объекта управления.*

Доказательство вытекает из решения уравнения (1.15) относительно искомой матрицы R.

2. Результаты численного экперимента

Проверка приведенных соотношений выполнялась в системе MAT- LAB с пакетом Control System Toolbox, в котором имеются функции для решения уравнений Риккати и Ляпунова, а также обеспечены многие матричные операции.

При моделировании матрицы объекта создавались случайным образом с последующей проверкой на управляемость пары A,B и A, CB). Положительно определенные матрицы квадратичного функционала формировались на основе стандартных матриц, входящих в галерею матриц системы MATLAB. Проверялось также при диагональных матрицах функционала. В качестве примера принимались фиксированные размеры матриц объекта и функционала; использовалось также псевдообращение матриц по методу Мура-Пенроуза. В случае не полностью управляемой системы уравнение Ляпунова не имеет решения в виде положительно определенной матрицы.

Из полученных результатов видно, что абсолютные погрешности укладываются в допустимую точность вещественного типа данных с двойной точностью – тип double.

Optimality ralations in the linear-quadratic control problem

© V. V. Afonin[3], S. M. Muryumin[4]

Abstract. This paper analyzes the problem of optimal stabilization oa linear stationary object. Showing optimality ratio relating the parameters of the object and the regulator. The numerical experiments, confirming the relations obtained optimality.

Key Words: control, optimal regulator, quadratic functional, model.

[3] Associate professor of ASOIU, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vvafonin53@yandex.ru

[4] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk.