УДК 517.9

Суммарно-разностное уравнение в частных разностях высокого порядка

© Т. К. Юлдашев [1] А. С. Хритоненко[2]

Аннотация. В данной работе предлагается методика изучения конечной задачи для нелинейного суммарно-разностного уравнения с разностным гиперболическим оператором произвольной натуральной степени. Доказываются существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: разностное уравнение первого порядка, нелинейная правая часть, однозначная разрешимость, метод последовательных приближений, метод сжимающих отображений

1. Постановка задачи

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1].

Выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2] - [5]. Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, хорошо развита. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

В данной работе как дискретный аналог уравнений в частных производных высокого порядка рассматривается суммарно-разностное уравнение с разностным гиперболическим оператором произвольной натуральной степени. Такое уравнение при конечных условиях заменяется с суммарным уравнением. Доказываются существование и единственность решения полученного суммарного уравнения.

На множестве D рассматривается нелинейное уравнение в частных разностях следующего вида

$$\left(\Delta_n^2-\Delta_m^2\right)^k u(n,m)=f\left(n,m,\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1}K(\nu,\mu)u(\nu,\mu)\right) \tag{1.1}$$

с конечными условиями

$$u(n,m)_{|n=N}=\varphi_1(m), \Delta_n^i u(n,m)_{|n=N}=\varphi_{i+1}(m),\ i=\overline{1,2k-1}, \tag{1.2}$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru;

[2] Студентка института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

где $u(n,m)$ – неизвестная функция, $f\big(n,m,u(n,m)\big)$ определена для всех $n \geq n_0$, $\varphi_i(m)$ определены для всех $m \in \mathbb{Z}$, $i=\overline{1,2k}$, $0 < \sum\limits_{\nu=n_0}^{N-1}\sum\limits_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu,\mu) < \infty$, $D \equiv D_N \times \mathbb{Z}$, $D_N \equiv \{n_0 \leq n \leq N\}$, $0 < n_0, n, N$ – натуральные числа, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, k – произвольное натуральное число, $\Delta_n^2 u(n,m) = \Delta\big(\Delta_n u(n+1,m) - \Delta_n u(n,m)\big) = u(n+1,m) - 2u(n,m) + u(n-1,m)$, $\Delta_m^2 u(n,m) = \Delta\big(\Delta_m u(n,m+1) - \Delta_m u(n,m)\big) = u(n,m+1) - 2u(n,m) + u(n,m-1)$, $\Delta_n u(n,m) = u(n+1,m) - u(n,m)$, $\Delta_m u(n,m) = u(n,m+1) - u(n,m)$.

2. Сведение задачи (1.1), (1.2) к суммарному уравнению

При решении задачи (1.1), (1.2) используем дискретный аналог метода характеристик. Левую часть уравнения (1.1) запишем в виде

$$\Big(\Delta_n^2 - \Delta_m^2\Big)^k u(n,m) = \Big(\Delta_n - \Delta_m\Big)^k \Big(\Delta_n + \Delta_m\Big)^k u(n,m) = L_1^k\big[L_2^k[u]\big],$$

где $L_1\big[L_2^k[u]\big] \equiv \Big(\Delta_n - \Delta_m\Big) L_2^k[u]$, $L_2[u] \equiv \Big(\Delta_n + \Delta_m\Big) u(n,m)$.

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$L_1^k\big[L_2^k[u]\big] = f\left(n, m, \sum_{\nu=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu,\mu) u(\nu,\mu)\right). \tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что разностное уравнение (1.1) имеет два k – кратные характеристики: 1) $m+N-n-1=C_1$; 2) $m-N+n+1=C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Суммируя уравнения (2.1) k раз вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L_1^{k-1}\big[L_2^k[u]\big] = \Phi_1\big(m-N+n+1\big) - \\ - \sum_{\nu=n}^{N-1} f\left(\nu, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu) u(\theta,\mu)\right), \tag{2.2}$$

$$L_1^{k-2}\big[L_2^k[u]\big] = \Phi_2\big(m-N+n+1\big) - \Phi_1\big(m-N+n+1\big)(N-n-1) + \\ + \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} f\left(\nu_2, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu) u(\theta,\mu)\right), \tag{2.3}$$

. . . .

$$L_2^k[u] = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i\big(m-N+n+1\big) \frac{(-1)^{i+1}(N-n-1)^{k-i}}{(k-i)!} + \\ + (-1)^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1} \cdots \sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} f\left(\nu_k, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu) u(\theta,\mu)\right), \tag{2.4}$$

где $\Phi_i(i=\overline{1,k})$ – произвольные целые функции, которые полежать определению.

Из (2.2)-(2.4), в силу конечных условий (1.2), получаем

$$\Phi_1(m) = \varphi_{2k}(m),\ \Phi_2(m) = \varphi_{2k-1}(m), \ldots,\ \Phi_k(m) = \varphi_{k+1}(m). \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4), имеем

$$L_2^k[u] = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{k+i}\big(m-N+n+1\big)\frac{(-1)^{i+1}(N-n-1)^{i-1}}{(i-1)!}+$$

$$+(-1)^k \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1} f\left(\nu_k, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu)u(\theta,\mu)\right). \qquad (2.6)$$

Аналогично, суммируя уравнения (2.6) k раз вдоль линии первой характеристики, получаем

$$L_2^{k-1}[u] = \Phi_{k+1}\big(m+N-n-1\big)-$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=n}^{N-1}\frac{(-1)^{j+2}(N-\nu-1)^{j-1}}{(j-1)!}\varphi_{k+j}\big(m-N+\nu+1\big)+$$

$$+(-1)^{k+1} \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_{k+1}=\nu_k}^{N-1} f\left(\nu_{k+1}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu)u(\theta,\mu)\right), \qquad (2.7)$$

$$L_2^{k-2}[u] = \Phi_{k+2}\big(m+N-n-1\big) - \Phi_{k+1}\big(m+N-n-1\big)(N-n-1)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\frac{(-1)^{j+3}(N-\nu_2-1)^{j-1}}{(j-1)!}\varphi_{k+j}\big(m-N+\nu_2+1\big)+$$

$$+(-1)^{k+2} \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_{k+2}=\nu_{k+1}}^{N-1} f\left(\nu_{k+2}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu)u(\theta,\mu)\right), \qquad (2.8)$$

. . . .

$$u(n,m) = \sum_{i=k+1}^{2k}\frac{(-1)^{i+1}(N-n-1)^{2k-i}}{(2k-i)!}\Phi_i\big(m+N-n-1\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1}\frac{(-1)^{j+k+1}(N-\nu_k-1)^{j-1}}{(j-1)!}\varphi_{k+j}\big(m-N+\nu_k+1\big)+$$

$$+(-1)^{2k} \sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_{2k}=\nu_{2k-1}}^{N-1} f\left(\nu_{2k}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu)u(\theta,\mu)\right), \qquad (2.9)$$

где $\Phi_i(i=\overline{k+1,2k})$ произвольные целые функции, подлежащие определению.

Из (2.7)-(2.9), в силу условия (1.2), получаем

$$\Phi_{k+1}(m) = \varphi_k(m),\ \Phi_{k+2}(m) = \varphi_{k-1}(m), \ldots,\ \Phi_{2k}(m) = \varphi_1(m). \qquad (2.10)$$

С учетом (2.10) для конечной задачи (1.1), (1.2) получаем следующее нелинейное суммарное уравнение:

$$u(n,m) \equiv \Theta(n,m;u) = \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i+1}(N-n-1)^{i-1}}{(i-1)!}\varphi_i\big(m+N-n-1\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_k=\nu_{k-1}}^{N-1}\frac{(-1)^{j+k+1}(N-\nu_k-1)^{j-1}}{(j-1)!}\varphi_{k+j}\big(m-N+\nu_k+1\big)+$$

$$+(-1)^{2k}\sum_{\nu_1=n}^{N-1}\sum_{\nu_2=\nu_1}^{N-1}\cdots\sum_{\nu_{2k}=\nu_{2k-1}}^{N-1} f\left(\nu_{2k}, m, \sum_{\theta=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\theta,\mu)u(\theta,\mu)\right), \tag{2.11}$$

где m – параметр.

3. Разрешимость задачи (1.1), (1.2)

Используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целых функций, ограниченных нормой с положительным числом M; $Lip\{L_{|u,v,...}\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \ldots$ с положительным числом L.

В качестве нормы в области D для произвольной целой функции $x(n,m)$ мы берем евклидову норму

$$\|x(n,m)\| = max\{|x(n,m)| : n \in D_N, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть следующие условия выполняются:*

1. $\varphi_i(m) \in Bnd(M_i), 0 < \sum\limits_{i=1}^{2k} M_i \dfrac{(N-1)^{i-1}}{(i-1)!} \le \delta_0 < \infty$;

2. $f(n,m,u) \in Bnd(M_0) \bigcap Lip\left\{L_{|u}\right\}$, $0 < L = const$;

3. $0 < M_0 \dfrac{(N-1)^{2k}}{(2k)!} \le \delta_1 < \infty$;

4. $\rho = L\dfrac{(N-1)^{2k}}{(2k)!}\sum\limits_{\nu=n_0}^{N-1}\sum\limits_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu,\mu) < 1$.

Тогда задача (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в области* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [6] - [8]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{cases} u_0(n,m) = 0, \\ u_{\gamma+1}(n,m) = \Theta(n,m;u_\gamma),\ \gamma = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{3.1}$$

где m – параметр.

Тогда, в силу условий теоремы, из (3.1) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\left\|u_1(n,m) - u_0(n,m)\right\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{2k} M_i \frac{(N-1)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(N-n-1)^{2k}}{(2k)!}\left\|f\big(n,m,0\big)\right\| \le \delta_0 + \delta_1, \tag{3.2}$$

$$\left\|u_{\gamma+1}(n,m) - u_\gamma(n,m)\right\| \le$$

$$\le \frac{(N-n-1)^{2k}}{(2k)!}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\sum_{\mu=-N}^{N-1} K(\nu,\mu)\left\|u_\gamma(\nu,\mu) - u_{\gamma-1}(\nu,\mu)\right\| \le$$

$$\le \rho\cdot\left\|u_\gamma(n,m) - u_{\gamma-1}(n,m)\right\| < \left\|u_\gamma(n,m) - u_{\gamma-1}(n,m)\right\|. \tag{3.3}$$

Из оценок (3.2) и (3.3) следует, что оператор в правой части (2.11) является сжимающим. Следовательно, задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение в области D.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Юлдашев Т. К., "Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени", *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5**:1 (2013), 69–75.

3. Юлдашев Т. К., "Задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени", *Таврический вестник информатики и математики*, 2013, № 1, 89–98.

4. Юлдашев Т. К., "Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2014, № 1, 145–155.

5. Юлдашев Т. К. Середкина А. И., "Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка", *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **32**:3 (2013), 46–55.

6. Yuldashev T. K., "On a summery equation with weak nonlinear right-hand side", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95–98.

7. Yuldashev T. K., "On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation", *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83–88.

8. Yuldashev T. K., "On a first order quasilinear partial difference equation", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677–680.

Partial summary difference equation of the higher order

© **T. K. Yuldashev**[3] **A. S. Kharitonenko**[4]

Abstract. It is proposed in this paper the method of studying the end-point problem for a nonlinear partial summary difference equation with difference hyperbolic operator of the arbitrary natural power. It is proved the theorem of existence and uniqueness of solution of the considering problem.
Key Words: difference equation of the first order, nonlinear right-hand side, one-value solvability, the method of successive approximations, the method of compressing mapping

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

[4] Student of Institute of Informatics and Telecommunication, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk