УДК 517.9

Энергетическая функция для структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором

© **В. З. Гринес[1], М. К. Носкова[2], О. В. Починка[3]**

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции для структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор.

Ключевые слова: структурно устойчивая система, растягивающийся аттрактор, энергетическая функция

1. Введение и формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются грубые диффеоморфизмы f, заданные на трехмерном гладком замкнутом многообразии M. Согласно спектральной теореме С. Смейла [3] неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $NW(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. Базисное множество Ω называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой. Если $\dim\ \Omega = 2$, то, согласно [6], Ω является либо аттрактором, либо репеллером[4]. Среди двумерных аттракторов (репеллеров) Ω диффеоморфизма $f : M \to M$ выделяют растягивающиеся (сжимающиеся)[5].

Обозначим через G класс структурно устойчивых диффеоморфизмов $f : M \to M$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор Ω.

Энергетическая функция для структурно устойчивого диффеоморфизма f — это гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, постоянная на базисных множествах и множество критических точек которой совпадает с множеством неблуждающих точек $MW(f)$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м).

---

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

[2] Студентка, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; mknoskova@yandex.ru

[3] Профессор кафедры информационных систем и технологий НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

[4] Компактное f-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\, U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

[5] Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Базисное множество диффеоморфизма f называется *сжимающимся репеллером*, если оно является растягивающимся аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}

2. Динамические свойства диффеоморфизмов класса G

В этом разделе мы изложим необходимую для доказательства теоремы 1.1. информацию о двумерном растягивающемся аттракторе Ω диффеоморфизма $f \in G$ следуя источникам [7], [2], [8], [4].

Из определения аттрактора Ω следует, что

$$\dim\ E^s_\Omega = \dim\ E^s_x = 1 \text{ для любой точки } x \in \Omega\,.$$

Введем следующие обозначения: $(x,y)^s$ — открытая дуга на одномерном устойчивом многообразии $W^s(z)$ с концевыми точками $x, y \in W^s(z)$, где $z \in \Omega$. Аналогичную замкнутую дугу обозначим через $[x,y]^s$.

Точка $x \in \Omega$ называется *s-граничной*, если одна из компонент связности множества $W^s_x \setminus x$ не пересекается с Ω.

Согласно [7] множество граничных точек конечное и все граничные точки периодические. Кроме того, в силу [7], [2], [8] все граничные точки аттрактора Ω разбиваются на *ассоциированные* пары (p,q) точек одинакового периода так, что 2*-связка* $W^u(p) \cup W^u(q)$ является достижимой изнутри границей[6] компоненты связности множества $M \setminus \Omega$.

Для каждой пары ассоциированных граничных периодических точек построим из дуг одномерных устойчивых многообразий связывающий двумерный цилиндр и соответствующую двумерную сферу.

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора Ω, состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$ ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и $m = m(p,q)$ — период точек p, q. Тогда для любой точки $x \in W^u(p) \setminus p$ существует единственная точка $y \in W^u(q)$ такая, что $(x,y)^s \cap \Omega = \emptyset$. Определим отображение

$$\varphi_{pq} = \varphi : (W^u(p) \setminus p) \cup (W^u(q) \setminus q) \to (W^u(p) \setminus p) \cup (W^u(q) \setminus q)\,,$$

положив $\varphi_{pg}(x) = y$ и $\varphi_{pg}(y) = x$. Тогда

$$\varphi_{pq}(W^u(p) \setminus p) = W^u(q) \setminus q \text{ и } \varphi_{pq}(W^u(q) \setminus q) = W^u(p) \setminus p\,,$$

то есть отображение φ_{pq} переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга и является инволюцией. В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение φ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^m|_{W^u(p)}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p, поэтому существует гладкий замкнутый 2-диск $D_p \subset W^u(p)$ такой, что $p \in D_p \subset int(f^m(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup\limits_{x \in \partial D_p} (x, \varphi(x))^s$ гомеоморфно открытому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1 \times (0;1)$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром.* Окружность $\varphi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в $W^u(q)$ двумерный 2-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset int(f^m(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рисунок 2.1).

[6] Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = cl(G) \setminus int(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимной изнутри границей* области G, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга,полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек.

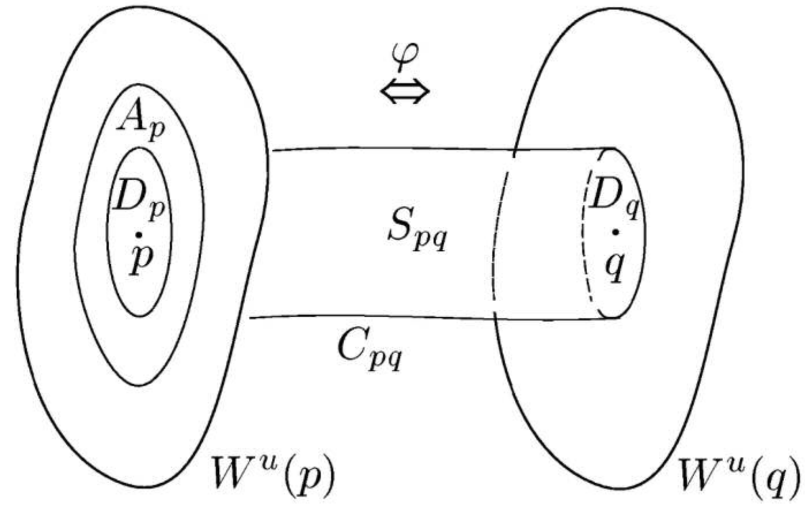

Рисунок **2.1**

Характеристическая сфера

Предложение 2.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ объемлющее многообразие гомеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$ и множество $T(f) = NW(f) \setminus \Omega$ имеет следующую структуру:*

1. *$T(f)$ принадлежит объединению 3-шаров Q_{pg}, ограниченных характеристическими сферами S_{pq};*
2. *для каждой связки B_{pq} существует натуральное число k_{pq} такое, что $T(f) \cap Q_{pq}$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{qp}}$ и $k_{qp} - 1$ седловых периодических точек $P_1, \ldots, P_{k_{qp}-1}$;*
3. *множество $l_{pq} = \bigcup\limits_{i=1}^{k_{qp}-1} cl\ W^s(P_i)$ является простой дугой, на которой источниковые периодические точки чередуются с седловыми (см. рисунок 2.2).*

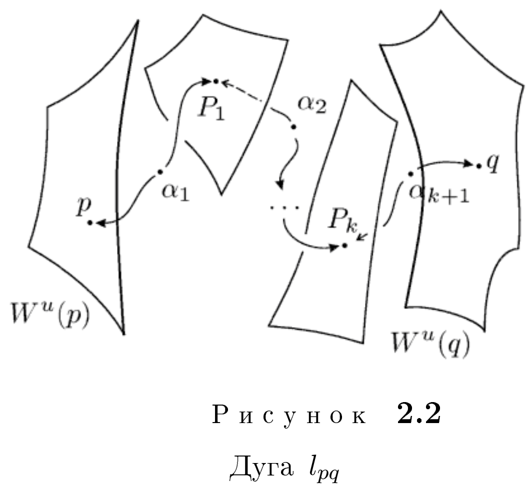

Рисунок **2.2**

Дуга l_{pq}

Заметим, что шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $P_j, j \in \{1, \dots, k_{qp}-1\}$ в точности по одному двумерному диску[7]. Тогда внутри шара Q_{pq} существует гладкий 3-шар $U_{l_{pq}}$ такой, что:

1) $l_{pg} \subset U_{l_{pq}} \subset f^m(U_{l_{pq}})$;

2) пересечение $U_{l_{pq}} \cap W^u(P_j)$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого $j \in \{1, \dots, k_{qp}-1\}$ (см. рисунок 2.3).

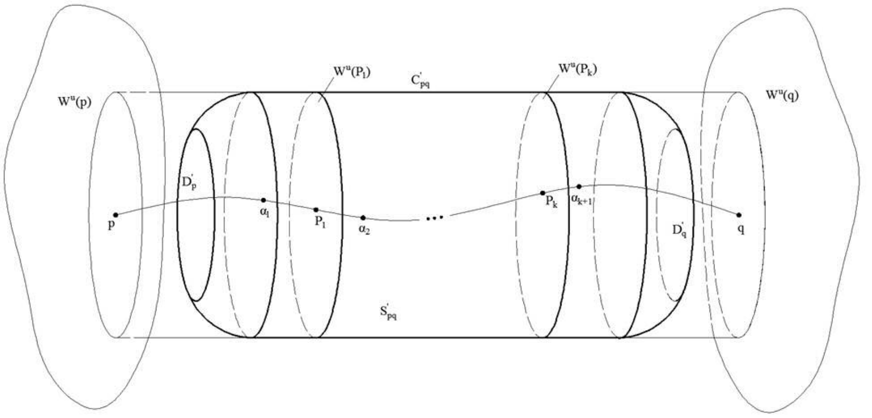

Рисунок **2.3**

Окрестность $U_{l_{pq}}$

Положим $K_{pq} = f^m(U_{l_{pq}}) \setminus U_{l_{pq}}$ и $L_{pq} = l_{pq} \cup f(l_{pq}) \cup \dots \cup f^m(l_{pq})$ и $U_{pq} = U_{l_{pq}} \cup f(U_{l_{pq}}) \cup \dots \cup f^m(U_{l_{pq}})$. Тогда L_{pq} является репеллером с захватывающей окрестностью U_{pq}. Обозначим через L, U объединение всех таких репеллеров и их захватывающих окрестностей, соответственно, по всем связкам аттрактора Ω. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{P}$ объединение всех источников и стоков, соответственно, множества $T(f)$.

В силу результатов работ [1] и [4] имеет место следующий факт.

Предложение 2.2. *На множестве U существует функция Морса $\psi : U \to [1;3]$ такая, что $\psi(\partial U) = 1$, $\psi(\mathcal{P}) = 2$, $\psi(\mathcal{A}) = 3$, являющаяся энергетической функцией диффеоморфизма $f|_U$.*

3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса G

Разобьем построение энергетической функции для $f \in G$ на шаги.

Шаг 1. Для каждой связки B_{pq} аттрактора Ω положим $K_{pq} = f^m(U_{l_{pq}}) \setminus U_{l_{pq}}$ и $W_{pq} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K_{pq})$. Поскольку трехмерное кольцо K_{pq} является фундаментальной областью диффеоморфизма $f^m|_{W_{pq}}$, то диффеоморфизм $f^m|_{W_{pq}}$ гладко сопряжен с гомотетией $g(x,y,z) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ на $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ посредством некоторого диффеоморфизма $h_{pq} : W_{pq} \to \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, переводящего кольцо K_{pq} в кольцо $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Функция $\varphi_g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ является энергетической функцией диффеоморфизма g. Положим $\varphi_{pq} = \varphi_g h_{pq}$.

[7] Это следует из того, что любая дуга $(x, \varphi(x))^s, x \in D_p \setminus p$ пересекает $W^u(P_j)$ ровно в одной точке для всех $j = 1, \dots, k_{pq}-1$. Предположим обратное: пусть существует пара точек, в которых $W^u(P_j)$ пересекает дугу $(x, \varphi(x))^s$. Тогда найдется точка, в которой произойдет касание устойчивого многообразия этой точки и неустойчивого многообразия $W^u(P_j)$, что противоречит структурной устойчивости диффеоморфизма f, а именно, сильному условию трансверсальности.

Положим $K = f(U)\backslash U$ и $W = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K)$. Сделав аналогичные построения для каждой 2-связки мы получим энергетическую функцию φ_W для диффеоморфизма f_W.

Положим $\tilde{\varphi}(z) = \begin{cases} \varphi_W(z), \text{ если } z \in \bigcup\limits_{n\geq 0} f^n(K); \\ \psi(z), \text{ если } z \in U; \\ 0, \text{ если } z \in \Omega; \end{cases}$

Шаг 2. По построению функция $\tilde{\varphi} : M \to [0,3]$ является функцией Морса на множестве $M \setminus \Omega$. Покажем, что функция $\tilde{\varphi}$ является непрерывной на M.

Для этого рассмотрим любую точку $a \in \Omega$ и покажем, что $\lim\limits_{z_n\to a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$ для любой последовательности точек $\{z_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, a) = 0$, где d — метрика на многообразии M. Поскольку $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$, то достаточно доказать утверждение для последовательности $\{z_n \in M \setminus \Omega\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует натуральное число k_n такое, что $z_n \in f^{k_n}(K_{pq})$ для некоторой связки B_{pq}. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, a) = 0$, то $k_n \to \infty$. Тогда по построению последовательность $\{h_{pq}(z_n) \in \mathbb{R}^3\}$ сходится к точке $(0,0,0)$. Откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_g(h_{pq}(z_n)) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{z_n\to a} \tilde{\varphi}(z_n) = 0$.

Шаг 3. Покажем, как сгладить функцию $\tilde{\varphi}$ на множестве Ω, сохранив при этом линии уровня.

Положим $U_\Omega = M \setminus U$ и $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}|_{cl\ U_\Omega} : cl\ U_\Omega \to [0,1]$. На отрезке $[0,1]$ зададим функцию $\nu : [0,1] \to [0,\infty)$ формулой $\nu(s) = inf\{e^{-\frac{1}{d(z,w)}},\ z, w \in cl\ U_\Omega : |\tilde{\eta}(z) - \tilde{\eta}(w)| \geq s\}$. По построению ν — непрерывная функция такая, что $\lim\limits_{s\to+0} \nu(s) = +0$. В силу лемм 1 и 3 работы [5], существует бесконечно гладкая монотонно возрастающая функция $q : [0,1] \to [0,1]$ такая, что функция $\eta = q\tilde{\eta} : cl\ U_\Omega \to [0,1]$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{|q(x)-q(y)|}{\nu(|x-y|)} = 0$. Непосредственно проверяется, что функция η является гладкой на Ω и $\eta(\Omega) = 0$.

Искомая функция $\varphi : M \to [0,3]$ определяется формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \eta(z), \text{ если } z \in cl\ \ U_\Omega; \\ \psi(z), \text{ если } z \in U. \end{cases}$$

Функция $\varphi : M \to [0,3]$ — энергетическая функция для диффеоморфизма $f \in G$. Таким образом, теорема 1.1. доказана.

Список литературы

1. Grines V.Z., Laudenbach F., Pochinka O.V., “Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278**:1 (2012), 27–40.

2. Гринес В.З., Жужома Е.В., “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Известия РАН. Серия Математическая*, **66**:2 (2002), 3–66.

3. Смейл С., “Дифференцируемые динамические сисмемы”, *УМН*, **25**:1 (151) (1970), 113–185.

4. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск.

5. Norton A., Pugh Ch., “Critical sets in the plane”, *Michigan Journal of Math.*, **38** (1991), 441–459.

6. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Мат. сборник*, **84 (126)**:2 (1971), 301–312.

7. Плыкин Р.В., “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6 (240) (1984), 75–113.

8. Жужома Е.В., Медведев В.С., “О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 83–104.

Energy function for structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional expanding attractor

© **V. Z. Grines**[8], **M. K. Noskova**[9], **O. V. Pochinka**[10]

Abstract. In this paper we prove the existence of the energy function for the structurally stable diffeomorphisms of closed three-dimensional manifolds non-wandering set of which contains two-dimensional expanding attractor

Key Words: Structurally stable system, expanding attractor, energy function

[8] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[9] Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; mknoskova@yandex
[10] Professor, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru