*УДК 517.9*

# Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке

© **Р. В. Жалнин[1], М. Е. Ладонкина[2], В. Ф. Масягин[3], В. Ф. Тишкин[4]**

**Аннотация.** Предлагается новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе метода Галёркина с разрывными базисными функциями, который обладает хорошей сходимостью и точностью при использовании явной схемы. Характерной особенностью предлагаемого метода является использование двойственной сетки, на которой ищется решение вспомогательных неизвестных. Исследование метода проводится на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Расчеты двумерных модельных задач в том числе с разрывами показывают хорошую точность предложенного метода.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, метод Галёркина с разрывными базисными функциями, сходимость и точность численного метода

## 1. Описание алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина

Построение и исследование алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = div(\kappa \cdot gradu) + f, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \leq T,\\
&u(x,y,t) = g(x,y,t), \quad (x,y) \in \gamma,\\
&u(x,y,0) = u_0(x,y),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $C_\nu$ - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, $\rho$ - плотность, $\kappa$ - коэффициент теплопроводности, $u$ - температура в точке $(x,y)$ в момент времени $t, f$ - плотность тепловых источников, $\gamma$ - граница области расчета, $g(x,y,t), u_0(x,y)$ - заданные функции. Область $G \cup \gamma$ - произвольная односвязная. В области $G \cup \gamma$ - введем треугольную сетку $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N\}$, содержащую внутренние и граничные точки области. На $\omega_p$ построим триангуляцию Делоне: $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\})\}$. Пусть $T(\omega_p)$ содержит все узлы $\omega_p$ ; все треугольники $T_k$ имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике $T_k$ с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ центр $(x_c, y_c)$ определим как:

[1] Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; zhalnin@gmail.com.

[2] Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; ladonkina@imamod.ru.

[3] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; vmasyagin@gmail.com.

[4] Заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

$x_c = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y_c = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ . Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек $\omega_p$ , образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с серединами сторон. Точка из $\omega_p$ будет являться центром для соответствующей ей ячейки двойственной сетки. Для аппроксимации первого уравнения из (1.1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [1]. Для этого введем дополнительные переменные [2]: $w_x = k\frac{\partial u}{\partial x}, w_y = k\frac{\partial u}{\partial y}$ . Тогда первое уравнение в исходной системе (1.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
&\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} w_x + \frac{\partial}{\partial y} w_y + f, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \le T,\\
&w_x = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \le T,\\
&w_y = \kappa \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \le T,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Таким образом, (1.2) – это система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения такой системы будем использовать предлагаемый метод на основе разрывного метода Галёркина.

На каждом треугольнике $T_k \in T(\omega_p)$ введем систему линейных базисных функций $\{\varphi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \varphi_0 = 1, \varphi_1 = \frac{x-x_c}{\Delta x}, \varphi_2 = \frac{y-y_c}{\Delta y}$ , где $(x_c, y_c)$ - центр соответствующего треугольника $T_k$, $\Delta x, \Delta y$ - проекции ячейки на соответствующие координатные оси. На каждой ячейке $D_k$ двойственной сетки введем систему линейных базисных функций $\{\psi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \psi_0 = 1, \psi_1 = \frac{x-x_c^d}{\Delta x^d}, \psi_2 = \frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ , где $(x_c^d, y_c^d)$ - центр соответствующей ячейки $D_k$ , $\Delta x^d, \Delta y^d$ - проекции ячейки двойственной сетки на соответствующие координатные оси.

Приближенное решение $u_k$ в разрывном методе Галеркина ищется как разложение по соответствующему базису[4]: $u_k = u_{0k} + u_{1k}\frac{x-x_c}{\Delta x} + u_{2k}\frac{y-y_c}{\Delta y}$ , $u_{ik} = u_{ik}(t), u_{ik} \in T_k$, $i = \overline{0,2}$ , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Приближенные решения $w_{xk}, w_{yk}$ будем искать в ячейке $D_k$ в виде разложения по соответсвующему базису: $w_{xk} = w_{x0k} + w_{x1k}\frac{x-x_c^d}{\Delta x^d} + w_{x2k}\frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ , $w_{xik} = w_{xik}(t), w_{xik} \in D_k, i = \overline{0,2}$ , $w_{yk} = w_{y0k} + w_{y1k}\frac{x-x_c^d}{\Delta x^d} + w_{y2k}\frac{y-y_c^d}{\Delta y^d}$ , $w_{yik} = w_{yik}(t), w_{yik} \in d_k, i = \overline{0,2}$ , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Умножим первое уравнение из (1.2) на пробную функцию $\varphi_i, i = 0,1,2,$ и проинтегрируем произведение по треугольнику $T_k$ , $k = \overline{1,N}$ , где $N$ - число треугольников. Точное решение $u$ заменим приближенным $u_k$ [3]. Получаем следующую систему для определения коэффициентов разложения $u_k$ по базису $\{\varphi_i\}$ :

$$\begin{aligned}
(\rho C_\nu)_k \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int\limits_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial T_k} n_x w_x \varphi_m dl + \oint\limits_{\partial T_k} n_y w_y \varphi_m dl -\\
- \int\limits_{T_k} w_x \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} ds - \int\limits_{T_k} w_y \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} ds + \int\limits_{T_k} \Phi_k \varphi_m ds, \quad m = \overline{0,2}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Умножим второе и третье уравнения из (1.2) на пробную функцию $\psi_i, i = 0,1,2,$ и проинтегрируем произведение по ячейке $D_k$ . Получаем следующие системы для определения коэффициентов разложения $w_{xk}, w_{yk}$ по базису $\{\psi_i\}$ :

$$\sum_{i=0}^{2} w_{xik} \int\limits_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_x \kappa u \psi_m dl - \int\limits_{D_k} u_k \frac{\partial (\kappa \psi_m)}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0,2}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=0}^{2} w_{yik} \int\limits_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_y \kappa u \psi_m dl - \int\limits_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa\psi_m)}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0,2}. \tag{1.5}$$

В случае, если коэффициент теплопроводности $\kappa$ терпит разрыв внутри расчетной области, необходимо это учитывать при вычислении интегралов по границе ячеек двойственной сетки. Разрыв коэффициента происходит на границе элементов основной сетки, поэтому необходимое дополнительно считать интегралы по линиям разрыва внутри ячеек $D_k$ (ЛР):

$$\sum_{i=0}^{2} w_{xik} \int\limits_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_x \kappa u \psi_m dl - \int\limits_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa\psi_m)}{\partial x} ds + \sum_j \int\limits_{\text{ЛР}_j} n_x(\kappa^+ - \kappa^-) u_f \psi_m dl, \quad m = \overline{0,2},$$

$$\sum_{i=0}^{2} w_{yik} \int\limits_{D_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_y \kappa u \psi_m dl - \int\limits_{D_k} u_k \frac{\partial(\kappa\psi_m)}{\partial y} ds + \sum_j \int\limits_{\text{ЛР}_j} n_y(\kappa^+ - \kappa^-) u_f \psi_m dl, \quad m = \overline{0,2},$$

где $u_f$ - потоковое значение $u$ на границе ячеек, $n_x, n_y$ - составляющие нормали, внешней по отношению к ячейке с индексом “$+$”. В вычислениях мы брали $u_f$ в одном случае как полусумму, в другом случае использовали противопоточную схему Шу[9].
Сначала из систем (1.4) и (1.5) находим $w_{x0k}, w_{x1k}, w_{x2k}, w_{y0k}, w_{y1k}, w_{y2k}$ на текущем временном слое, используя значения $u_k$ с предыдущего временного слоя, а после подставляем их в систему (1.3) для нахождения $u_{0k}, u_{1k}, u_{2k}$ на текущем временном слое.

## 2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника $T_k$ и ячейки двойственной сетки $D_k$

Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, необходимо сделать замену вида: $t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}$. Получаем:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int\limits_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2})dx.$$

В вычислениях мы использовали двухточечный шаблон.

## 3. Вычисление двойного интеграла по треугольнику $T_k$ и ячейке двойственной сетки $D_k$

Двойной интеграл по ячейке двойственной сетки считаем как сумму двойных интегралов по треугольникам, из которых она состоит. Следуя работе [5] возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\widetilde{t_1} : \left(\zeta_1 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{6}\right), \quad \omega_1 = \frac{1}{3},$$

$$\widetilde{t_2} : \left(\zeta_2 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{3},$$

$$\widetilde{t_3} : \left(\zeta_3 = \frac{1}{6}, \eta_3 = \frac{1}{6}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{3}.$$

Значение интеграла по треугольнику с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$, $T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ равно

$$\int\limits_{T_k} f(x,y)ds = J \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\zeta} f(\zeta,\eta) d\zeta d\eta \approx J\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \widetilde{f}(\zeta_i,\eta_i)\omega_i,$$

где $J = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$ - якобиан перехода к каноническому треугольнику, $\widetilde{f}$ - значение подынтегральной функции в образах точек $\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}$ и $\widetilde{t_3}$ в исходном треугольнике $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$.

## 4. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов ряда двумерных модельных задач. В качестве задачи 1 рассматривалась начально-краевая задача для уравнения теплопроводности [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \le T,\\
&u(x,y,0) = 1 + x + y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,\\
&u(0,y,t) = 1 + y, u(1,y,t) = 2 + y, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T,\\
&u(x,0,t) = 1 + x, u(x,1,t) = 2 + x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T,
\end{aligned}$$

где $\kappa = 1 + 0.3sin(10\pi x)$. Решение сравнивалось с решением $u^H$, полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения $T = 0.0002$.

В таблице 1 указано значение погрешности метода $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, где $S_i$ - площадь $i$-го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина (DG) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

*Таблица 1.* Значения погрешности $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, полученные при решении задачи 1.

| | DG | | CDG | |
|---|---|---|---|---|
| $N$=2099 | $9.69{\cdot}10^{-7}$ | | $2.12{\cdot}10^{-7}$ | |
| $N$=8453 | $2.02{\cdot}10^{-7}$ | 2.26 | $1.12{\cdot}10^{-8}$ | 4.24 |
| $N$=33975 | $8.30{\cdot}10^{-8}$ | 1.28 | $2.10{\cdot}10^{-9}$ | 2.42 |

В качестве второй модельной задачи рассматривалась задача:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \le T,\\
&u(x,y,0) = 1 + x + y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,\\
&u(0,y,t) = 1 + y, u(1,y,t) = 2 + y, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T,\\
&u(x,0,t) = 1 + x, u(x,1,t) = 2 + x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T,
\end{aligned}$$

где $\kappa = 2$ при $x \in [0.25; 0.75], y \in [0.25; 0.75]$ и $\kappa = 1$ в противном случае. Решение сравнивалось с решением $u^H$, полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения $T = 0.0002$.

В таблице 2 указано значение погрешности метода $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, где $S_i$ - площадь $i$-го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого метода на основе разрывного метода Галёркина с потоком, взятым в виде полусуммы (схема 1) и потоком Shu (схема 2) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

*Таблица 2.* Значения погрешности $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, полученные при решении задачи 2.

| | схема 1 | | схема 2 | | CDG | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$=2085 | $1.09{\cdot}10^{-6}$ | | $1.32{\cdot}10^{-6}$ | | $3.46{\cdot}10^{-7}$ | |
| $N$=8546 | $2.17{\cdot}10^{-7}$ | 2.39 | $3.19{\cdot}10^{-7}$ | 2.05 | $3.13{\cdot}10^{-8}$ | 3.47 |
| $N$=34049 | $9.21{\cdot}10^{-8}$ | 1.24 | $1.22{\cdot}10^{-7}$ | 1.39 | $1.31{\cdot}10^{-7}$ | 1.26 |

В качестве третьей модельной задачи рассматривалась задача:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \le T,\\
&u(x, y, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,\\
&u(0, y, t) = 1, u(1, y, t) = 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T,\\
&u(x, 0, t) = 1, u(x, 1, t) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

Решение сравнивалось с решением $u^H$, полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [7] на подробной структурированной сетке. Расчет производился до значения $T = 0.0002$.

В таблице 3 указано значение погрешности метода $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, где $S_i$ - площадь $i$-го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина (DG) и результаты работы разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками (CDG) [8].

*Таблица 3.* Значения погрешности $\sum\limits_{i=1}^{N}\left(u_i - u^H\right)^2 S_i$, полученные при решении задачи 3.

| | DG | | CDG | |
|---|---|---|---|---|
| $N$=2085 | $1.32{\cdot}10^{-6}$ | | $3.46{\cdot}10^{-7}$ | |
| $N$=8546 | $3.19{\cdot}10^{-7}$ | 2.05 | $3.13{\cdot}10^{-8}$ | 3.47 |
| $N$=34049 | $1.22{\cdot}10^{-7}$ | 1.39 | $1.31{\cdot}10^{-7}$ | 1.26 |

Как видно из результатов расчетов, предлагаемый метод обладает высоким порядком точности, сравнимым с результатами, полученными с помощью разрывного метода Галёркина со стабилизационными добавками. Но при этом предложенный метод меньше подвержен отрицательному скачку порядка сходимости. Ранее была показана [10] работоспособность метода на неструктурированных сетках с сильно вытянутыми ячейками там, где РМГ со стабилизационными добавками перестает работать.

**Вывод.** Создан новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина. На примере ряда двумерных модельных задач численно показано, что предложенный метод обладает сходимостью и хорошей точностью, полученное решение близко к решению по разрывному методу Галеркина со стабилизационными добавками.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 14 – 01 – 31260 мол_а)

## Список литературы

1. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с английского*, Мир, М., 1988, 352 с.

2. Bassi F., Rebay S., “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.*, **131** (1997), 267–279.

3. Cockburn B., Shu C. W., “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *J. Sci. Comp.*, **3** (2001), 173–261.

4. Bernardo Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics)”, **1697** (1998), 151–268.

5. Li B. Q., *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 pp.

6. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф., “Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов”, *Труды Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 21–44.

7. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, 3-е изд., испр., Наука, М., 1989, 616 с.

8. Pany A. K., Yadav S., “An hp-Local Discontinuous Galerkin method for Parabolic Integro-Differential Equations”, **Report Number 09/30**.

9. Xu Y., Shu C.-W., “Error estimates of the semi-discrete local discontinuous Galerkin method for nonlinear convection-diffusion and KdV equations”, **196** (2007), 3805–3822.

10. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Панюшкина Е. Н., “О применении разрывного метода Галёркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках”, *Современные проблемы науки и образования*, **6** (2013), URL: www.science-education.ru/113-10929.

# Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids

© **R. V. Zhalnin**[5], **M. Ye. Ladonkina**[6], **V. F. Masyagin**[7], **V. F. Tishkin**[8]

**Abstract.** The new effective solution algorithm for diffusion type equations on base of discontinuous Galerkin method is offered, which has good convergence and accuracy when using the explicit scheme. A characteristic feature of the offered method is to use a dual mesh on which the solution is sought of ancillary parameters. Investigation of the method is exemplified by the initial-boundary value problem for two-dimensional heat equation. Calculations of two-dimensional modeling problems including with explosive factors have shown a good accuracy of offered method.

**Key Words:** parabolic equations, discontinuous Galerkin method, convergence and accuracy of the method.

[5] Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; zhalnin@gmail.com.

[6] Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; ladonkina@imamod.ru.

[7] Postgraduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vmasyagin@gmail.com.

[8] Deputy Director for Science of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.