

УДК 517.938

Реализация изотопических классов градиентно-подобных диффеоморфизмов тора

© Е. Я. Гуревич¹, Д. Т. Сяинова.²

Аннотация. В работе уточняются результаты работы [7] С. Баттерсона, в которой описаны классы изотопных отображений тора, содержащие диффеоморфизмы Морса-Смейла. Следуя идеям, изложенным в [7], мы описываем изотопические классы, содержащие градиентно-подобные диффеоморфизмы тора, приводим все возможные виды наборов периодических данных таких диффеоморфизмов и описывается алгоритм реализации каждого набора.

Ключевые слова: изотопическая классификация, градиентно-подобные диффеоморфизмы, диффеоморфизмы тора, структурно-устойчивые динамические системы

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ замкнутого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа периодических точек;
- 2) все периодические точки являются гиперболическими;
- 3) инвариантные многообразия различных седловых периодических точек пересекаются трансверсально.

Диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^n \rightarrow M^n$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует $\dim W_p^u < \dim W_q^u$. В случае $n = 2$ последнее условие означает, что диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ Морса-Смейла является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда инвариантные многообразия различных его седловых точек не пересекаются. Обозначим через $MS_+(T^2)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на торе и через $G_+(T^2)$ подмножество множества $MS_+(T^2)$, состоящее из градиентно-подобных диффеоморфизмов.

Два диффеоморфизма f, f' на торе T^2 называются *изотопными*, если существует непрерывное отображение $H : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^2$ такое, что для каждого $t \in [0, 1]$ отображение $H : T^2 \times \{t\} \rightarrow T^2$ является гомеоморфизмом и $H|_{T^2 \times \{0\}} = f$, $H|_{T^2 \times \{1\}} = f'$ ³.

Цель настоящей работы состоит в изучении изотопических классов, содержащих диффеоморфизмы из класса $G_+(T^2)$, и описании структуры неблуждающего множества таких диффеоморфизмов. Мотивировка этой задачи принадлежит С. Баттерсону и заключается в следующем. Во-первых, тор является единственной ориентируемой поверхностью,

¹ Доцент кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; elena_gurevich@list.ru.

² Студентка факультета ВМК (кафедры теории управления и динамики машин), Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

³ Из работы [9] (теорема 6.3) следует, что два диффеоморфизма поверхности изотопны тогда и только тогда, когда они гомотопны

для которой изотопический класс сохраняющего ориентацию диффеоморфизма определяется его действием в группе гомологий $H_1(T^2, \mathbb{R})$, что позволяет найти необходимые условия существования градиентно-подобного диффеоморфизма в изотопическом классе. Во-вторых, относительно простая динамика таких диффеоморфизмов позволяет описать структуру неблуждающего множества диффеоморфизма, определяемую изотопическим классом, и предъявить алгоритм реализации каждого допустимого периодического набора. Актуальность изучения градиентно-подобных систем следует из структурной устойчивости таких систем, что позволяет использовать их в задачах математического моделирования.

Из [5] (см. раздел D главы 2) следует, что диффеоморфизмы $f, f' : T^2 \rightarrow T^2$ изотопны тогда и только тогда, когда совпадают индуцированные изоморфизмы первой гомологической группы $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$, $f'_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$. Так как группа $H_1(T^2, \mathbb{R})$ изоморфна прямому произведению $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, то для любого диффеоморфизма $f : T^2 \rightarrow T^2$ индуцированный изоморфизм $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ (и, следовательно, его изотопический класс) определяется унимодулярной целочисленной матрицей. Далее будем рассматривать только сохраняющие ориентацию отображения, что сужает класс рассматриваемых матриц до матриц $SL(2, \mathbb{Z})$, имеющих положительный определитель.

В силу работы [6] для любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f : T^2 \rightarrow T^2$ все собственные числа матрицы индуцированного изоморфизма $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ являются корнями из единицы. Баттерсон (см. лемму 3 работы [7]) доказал, что любая матрица из $SL(2, \mathbb{Z})$, обладающая этим свойством, подобна (при помощи матрицы из $SL(2, \mathbb{Z})$) одной из следующих матриц.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот результат лег в основу основного результата работы [7], утверждающего, что в каждом изотопическом классе, определяемом матрицей, подобной одной из матриц B_1, \dots, B_5 , существует диффеоморфизм Морса-Смейла.

Следующая лемма утверждает, что изотопические классы, определяемые матрицами B_1, B_2 , содержат градиентно-подобные диффеоморфизмы только тогда, когда $m = 0$, а динамика градиентно-подобного диффеоморфизма (в частности, максимальный период периодических орбит) существенным образом зависит от свойств матрицы.

Будем говорить, что матрица $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ является *периодической периода $t > 0$* , если $A^m = E$ и $A^i \neq E$ для любого положительного $i < m$.

Л е м м а 1.1. *Если $f \in G_+(T^2)$, то:*

- 1) *индуцированный изоморфизм f_* имеет периодическую матрицу⁴;*
- 2) *если $f_* \neq E$, то максимальный период периодических точек f не превышает периода t_f матрицы f_* ;*
- 3) *если σ — седловая точки диффеоморфизма f , то период точки σ равен либо t_f — в случае, если диффеоморфизм $f_{W_\sigma^u}$ сохраняет ориентацию W_σ^u , либо $t_f/2$ — в случае, если диффеоморфизм $f_{W_\sigma^u}$ меняет ориентацию W_σ^u .*

⁴ Этот факт доказан в кандидатской диссертации А.Н. Безденежных, его справедливость также следует из теоремы 3.1.1 книги [4]. Для связности изложения мы приводим его доказательство.

Из утверждения 1) леммы следует, в частности, нижеприведенное утверждение.

С л е д с т в и е 1.1. *Если $f \in G_+(T^2)$, то матрица индуцированного изоморфизма $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ подобна одной из следующих матриц.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для описания структуры неблуждающего множества диффеоморфизма $f \in G_+(T^2)$, определяемого его изотопическим классом, введем, следуя работе [2], понятие набора периодических данных диффеоморфизма f . Каждой периодической орбите γ диффеоморфизма f поставим в соответствие тройку чисел $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$, где p_γ - период орбиты γ , $u_\gamma = \dim W_\gamma^u$ - ее индекс Морса, а параметр ν_γ равен $+1$ (-1), если $f^m|_{W_p^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_γ^u .

О п р е д е л е н и е 1.1. *Периодическими данными диффеоморфизма f будем называть набор P_f троек $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$ всех орбит γ диффеоморфизма f , частично упорядоченный в порядке возрастания периода и индекса.*

Если набор P_f содержит $l > 0$ одинаковых троек $(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$, то набор всех таких троек будем сокращенно записывать как $l(p_\gamma, u_\gamma, \nu_\gamma)$.

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. *Диффеоморфизм $f : T^2 \rightarrow T^2$ принадлежит классу $G_+(T^2)$ тогда и только тогда, когда матрица f_* подобна матрице A_i , $i \in 1, \dots, 5$, и набор периодических данных P_f диффеоморфизма f совпадает с одним из перечисленных ниже наборов (при этом набор P_{i,j_i} соответствует классу подобия матрицы A_i , $j_i \in \{1, \dots, 9\}$).*

- 1) $P_{1,1} = \{l_n^0(n, 0, +1); l_n^1(n, 1, +1); l_n^2(n, 2, +1)\}$; где n, l_n^1, l_n^0, l_n^1 - любые натуральные числа такие, что $l_n^1 = l_n^0 + l_n^2$.
- 2) $P_{2,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 1, -1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); (2, 1, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,2} = \{(1, 0, +1); (1, 1, -1); 2(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); (2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,3} = \{(1, 0, +1); 2(1, 1, -1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,4} = \{(1, 0, +1); 3(1, 1, -1); l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); (2, 2, +1), l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,5} = \{3(1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 0, +1), l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,6} = \{4(1, 1, -1); (2, 0, +1), l_2^0(2, 0, +1); l_2^1(2, 1, +1); (2, 2, +1), l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,7} = \{3(1, 0, +1); (1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,8} = \{(1, 0, +1); 3(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
 $P_{2,9} = \{2(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_2^0(2, 0, +1); 2(2, 1, +1), l_2^1(2, 1, +1); l_2^2(2, 2, +1)\}$;
- 3) $P_{3,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 2, +1); l_3^0(3, 0, +1); (3, 1, +1), l_3^1(3, 1, +1); l_3^2(3, 2, +1)\}$;
 $P_{3,2} = \{(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_3^0(3, 0, +1); (3, 1, +1), l_3^1(3, 1, +1); l_3^2(3, 2, +1)\}$;

- 4) $P_{4,1} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 1, -1); l_4^0(4, 0, +1); l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
 $P_{4,2} = \{2(1, 0, +1); (2, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
 $P_{4,3} = \{(2, 0, +1); 2(1, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
 $P_{4,4} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 2, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
 $P_{4,5} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 0, +1); l_4^0(4, 0, +1); (4, 1, +1), l_4^1(4, 1, +1); l_4^2(4, 2, +1)\};$
- 5) $P_{5,1} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 1, -1); l_6^0(6, 0, +1); l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$
 $P_{5,2} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 1, -1); l_6^0(6, 0, +1); l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$
 $P_{5,3} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 0, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$
 $P_{5,4} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 0, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$
 $P_{5,5} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 2, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$
 $P_{5,6} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 2, +1); l_6^0(6, 0, +1); (6, 1, +1), l_6^1(6, 1, +1); l_6^2(6, 2, +1)\};$

где $l_i^0, l_i^1, l_i^2, i \in \{2, 3, 4, 6\}$, — любые целые неотрицательные числа такие, что $l_i^1 = l_i^0 + l_i^2$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за плодотворные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00672-а и № 13-01-12452-офи-м2.

2. Допустимые периодические наборы диффеоморфизмов из $G_+(T^2)$

В этом разделе доказывается необходимое условие теоремы 1.1.. Пусть $f \in G_+(T^2)$, $f_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$ — индуцированный изоморфизм. В силу следствия 1.1. матрица отображения f_* подобна (при помощи некоторой матрицы $B_f \in SL(2, \mathbb{Z})$ одной из пяти матриц A_1, \dots, A_5 . Докажем, что класс подобия матрицы f_* определяет вид набора периодических данных диффеоморфизма f . Матрицы A_i, B_f определяют диффеоморфизмы f_i, g_f такие, что $f = g_f^{-1} f_i g_f$, что означает, что диффеоморфизм f гладко сопряжен с диффеоморфизмом f_i и, следовательно, периодические наборы диффеоморфизмов f, f_i совпадают. Таким образом, теорему достаточно доказать для диффеоморфизмов $f_1, \dots, f_5 \in G_+(T^2)$, чьи изотопические классы определяются матрицами A_1, \dots, A_5 соответственно.

Идея доказательства базируется на приведенном ниже утверждении Дж. Френкса, устанавливающим связь между набором периодических данных диффеоморфизма Морса-Смейла и индуцированными изоморфизмами гомологических групп. Для точной формулировки этого результата приведем определения динамической и гомологической дзета-функций.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть $f \in MS_+(T^2)$, Ω_f — множество его неблуждающих орбит. Динамической дзета-функцией Артина-Мазура диффеоморфизма f называется функция $\zeta_f(t) = \prod_{\gamma \in \Omega_f} (1 - \nu_\gamma t^{p_\gamma})^{(-1)^{u_\gamma+1}}$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть $f : T^2 \rightarrow T^2$ — диффеоморфизм, $f_{*i} : H_i(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(T^2, \mathbb{R})$ — индуцированный изоморфизм. Гомологической дзета-функцией диффеоморфизма f называется функция $\eta_f(t) = \prod_{i=0}^2 (E - t f_{*i})^{(-1)^{i+1}}$.

Из [10] следует, что справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2..1 Если $f \in MS_+(T^2)$, то $\zeta_f = \eta_f$.

Непосредственное вычисление гомологических дзета-функций в каждом изотопическом классе, определяемом матрицами A_1, \dots, A_5 , приводит к следующему утверждению.

П р е д л о ж е н и е 2.1. Пусть $f : T^2 \rightarrow T^2$ такой, что $f_{*1} = A_i$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. Тогда его гомологическая функция η_i определяется следующей формулой.

$$\eta_1 = 1; \quad \eta_2 = \frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_3 = \frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_4 = \frac{1+t^2}{(1-t)^2}; \quad \eta_5 = \frac{1-t+t^2}{(1-t)^2}.$$

Дальнейшее доказательство необходимого условия теоремы 1.1. сводится к подбору значений параметров $\nu_\gamma, p_\gamma, u_\gamma$ таких, чтобы выполнялось равенство $\frac{\zeta_{f_i}}{\eta_i} = 1$.

Обозначим через Ω_f^k множество периодических орбит диффеоморфизма f индекса $k \in \{0, 1, 2\}$ и представим множество Ω_f^1 как объединение двух подмножеств $\Omega_f^{1+}, \Omega_f^{1-}$, состоящих из точек с типом ориентации равным $+1, -1$ соответственно. Будем обозначать через l_m^k число периодических орбит диффеоморфизма f индекса $k \in \{0, 1, 2\}$ периода m . Из теоремы 2.1.1 работы [4] и формулы Лефшеца (см. лемму 3.1 работы [4]) вытекает справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Для любого $f \in G_+(T^2)$ множества Ω_f^k непусты, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Окончание доказательства необходимого условия теоремы 1.1.

Пусть диффеоморфизм $f \in G_+(T^2)$ изотопен тождественному. Тогда лемма 1.1., предложение 2.1. и утверждение 2..1 приводят к следующему соотношению.

$$\frac{(1 + t^{m_f/2})^{l_{m_f/2}^1} (1 - t^{m_f})^{l_{m_f}^1}}{\prod_{\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2} (1 - t^{m_\gamma})} = 1, \quad (2.1)$$

где $m_\gamma \leq m_f$ для любого $\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2$.

Число $t = 1$ является нулем числителя порядка $l_{m_f}^1$ (в силу формулы $(1 - t^m) = (1 - t)(1 + t + \dots + t^{m-1})$), поэтому для тождественного выполнения тождества необходимо, чтобы $t = 1$ являлся нулем знаменателя того же порядка, то есть число множителей в знаменателе равно $l_{m_f}^1$. Отсюда следует, что $m_\gamma = m_f$ для любого $\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2$, $l_{m_f/2}^1 = 0$, $|\Omega_f^0 \cup \Omega_f^2| = l_{m_f}^1 = |\Omega_f^1|$. Последние соотношения означают, что вид периодического набора диффеоморфизма f совпадает с набором $P_{1,1}$.

Пусть теперь изотопический класс диффеоморфизма $f \in G_+(T^2)$ определяется матрицей A_2 . Лемма 1.1., предложение 2.1. и утверждение 2..1 приводят к следующему соотношению.

$$\frac{(1 - t)^2 (1 + t^{m_f/2})^{l_{m_f/2}^1} (1 - t^{m_f})^{l_{m_f}^1}}{(1 + t)^2 \prod_{\gamma \in \Omega_f^0 \cup \Omega_f^2} (1 - t^{m_\gamma})} = 1, \quad (2.2)$$

где $m_\gamma \leq m_f \leq 2$.

Если $m_f = 1$, то последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$\frac{(1-t)^{l_1^1+2}}{(1+t)^2(1-t)^{l_1^0+l_1^2}} = 1. \tag{2.3}$$

В силу формулы Лефшеца $l_1^1 = l_1^0 + l_1^2$, отсюда следует, что последнее соотношение не выполняется тождественно для произвольного $t \neq 0$. Поэтому $m_f = 2$ и соотношение 2.2 имеет вид

$$\frac{(1+t)^{l_1^1+l_2^1}(1-t)^{l_2^2+2}}{(1+t)^2(1-t)^{l_1^0+l_1^2+l_2^0+l_2^2}(1+t)^{l_2^0+l_2^2}} = 1, \tag{2.4}$$

что приводит к соотношениям $l_2^1 = l_2^0 + l_2^2 + l_1^0 + l_1^2 - 2$; $l_1^1 = 4 - l_1^0 - l_1^2$ и анонсированным видам допустимых наборов.

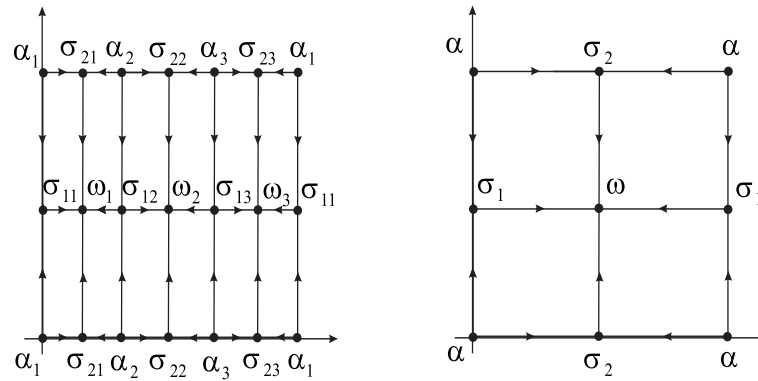
Доказательство теоремы для остальных матриц строится аналогичным образом. Для завершения доказательства необходимого условия теоремы 1.1. осталось привести доказательство леммы 1.1.

Доказательство леммы 1.1.

Ключом к доказательству всех пунктов леммы является доказательство того факта, что сепаратрисы всех седловых точек диффеоморфизма $f \in G_+(T^2)$ имеют одинаковый период. Действительно, если m — период всех сепаратрис, то период любой седловой орбиты γ равен m , если $\nu_\gamma = +1$ и равен $\frac{m}{2}$, если $\nu_\gamma = -1$, а период любой узловой орбиты не превышает m . Кроме того, объединение устойчивых многообразий периодических орбит диффеоморфизма f задает клеточное разбиение тора T^2 . Тогда образующие группы $H_1(T^2, \mathbb{R})$ принадлежат одномерному подкомплексу A_f , образованному замыканиями устойчивых сепаратрис, и период любой петли $\lambda \in A_f$ равен m , следовательно, отображение f_* является периодическим периода m .

Докажем, что сепаратрисы всех седловых точек диффеоморфизма $f \in G_+(T^2)$ имеют одинаковый период. Пусть $L_\omega = \{l_0, \dots, l_{k-1}\}$ — множество сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма f , в замыкании которых содержится сток ω . Покажем, что все сепаратрисы из множества L_ω имеют одинаковый период. Из гиперболичности точки ω следует, что существует замкнутая кривая $S_0 \in W_\omega^s$, ограничивающая диск D_0 с точкой ω внутри, и пересекающаяся с каждой сепаратрисой из множества L_ω в единственной точке. Положим $z_i = l_i \cap S_0$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Не уменьшая общности предположим, что индексация сепаратрис выбрана таким образом, что точки z_1, \dots, z_k разбивают S_0 на k отрезков, причем внутри отрезка с граничными точками z_i, z_{i+1} нет других точек из множества $L_\omega \cap S_0$, $i \in 0, \dots, k-2$. Положим $S_j = f^{jm_\omega}(S_0)$, $z_i^j = l_i \cap S_j$, $i \in \{1, 2, \dots\}$. Так как отображение $f^{jm_\omega}|_{S_0} : S_0 \rightarrow S_j$, $j = 1, 2, \dots$, является сохраняющим ориентацию, оно индуцирует перестановку g_j на множестве индексов $\{0, \dots, k-1\}$ такую, что $g_j(i-1, i, i+1) = (n-1, n, n+1) \pmod k$, $i, n \in \{0, \dots, k-1\}$. Кроме того, если $m_{l_i} = n_i m_\omega$ — период сепаратрисы l_i , то $g_{n_i}(i) = i$. Тогда $g_{n_i}(i-1) = i-1$, $g_{n_i}(i+1) = i+1$, откуда следует, что $m_{l_{i-1}} = m_{l_{i+1}} = m_{l_i}$. В силу произвольности выбора индекса i отсюда следует, что $m_{l_n} = m_{l_i}$ для любых $i, n \in \{0, \dots, k-1\}$.

Докажем, что все неустойчивые сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма f имеют одинаковый период. Для этого достаточно доказать связность множества $A_f = W_{\Omega_f^1}^u \cup \Omega_f^0$. Заметим, что A_f — аттрактор диффеоморфизма f , то есть существует такая окрестность U множества A_f и положительное число r , что $f^r(U) \subset U$, $W_{A_f}^s = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^{ir}(U)$. Так как $T^2 = \bigcup_{\gamma \in \Omega_f} W_\gamma^s$ (см., например, теорему 2.1.1 книги [4]), то

Рис. 1: Фазовые портреты потоков $X_{1(1)}^t, X_{1(3)}^t$

$W_{A_f}^s = T^2 \setminus W_{\Omega_f^2}^s = T^2 \setminus \Omega_f^2$. Предположим, что A_f несвязно. Тогда множество $W_{A_f}^s = T^2 \setminus \Omega_f^2$ также несвязно, что противоречит теореме о разбивающих множествах (см., например, [4], теорему 11.3.2).

Обозначим через m_{A_f} период всех сепаратрис (совпадающий с периодом аттрактора A_f). Отметим, что период стоковых орбит не превышает m_{A_f} ; если γ — седловая орбита такая, что $\nu_\gamma = +1$, то $m_\gamma = m_{A_f}$; если γ — седловая орбита такая, что $\nu_\gamma = -1$, то $m_\gamma = \frac{1}{2}m_{A_f}$. Аналогичные аргументы, примененные к репеллеру $R_f = W_{\Omega_f^1}^u \cup \Omega_f^2$ приводят к заключению, что период любой источниковой орбиты не превосходит m_{A_f} .

3. Реализация допустимых наборов

Для доказательства достаточности условия теоремы 1.1. для каждого из допустимых наборов опишем алгоритм построения градиентно-подобного диффеоморфизма в соответствующем изотопическом классе, набор периодических данных которых совпадает с допустимым набором. Построение разобьем на два этапа. На первом этапе в каждом изотопическом классе строятся модельные диффеоморфизмы с минимальным возможным числом периодических орбит. Периодические наборы таких диффеоморфизмов будем называть *минимальными*. На втором этапе описывается алгоритм модификации каждого модельного диффеоморфизма, для построения диффеоморфизма, реализующего произвольный допустимый периодический набор в данном изотопическом классе. Ниже приводится детальное описание первого этапа. Второй этап аналогичен шагу 1 доказательства теоремы реализации работы [3].

Представим тор T^2 как фактор-пространство евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 по следующему отношению эквивалентности: точки $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют целые числа m, n такие, что $x_b = x_a + m, y_b = y_a + n$. Фазовые портреты всех динамических систем на торе будем изображать на квадрате $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, являющемся разверткой тора T^2 .

3.1. Реализация минимального периодического набора в изотопическом классе тождественного диффеоморфизма

Для каждого $n > 0$ положим $h_{1(n)}(x, y) = (x + \frac{1}{n}, y) \pmod{1}$, и определим диффеоморфизм $g_{1(n)}$ как сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока $X_{1(n)}^t$, определенного

следующей системой дифференциальных уравнений (фазовые портреты потоков $X_{1(3)}^t$, $X_{1(1)}^t$ изображены на рисунке 1).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin \frac{2\pi x}{n} (\text{mod } 1) \\ \dot{y} = \sin \frac{2\pi y}{n} (\text{mod } 1) \end{cases}$$

Суперпозиция $g_{1(n)}h_{1(n)}$ принадлежит классу $G_+(T^2)$ и имеет набор периодических данных $P_{1,1}^{min} = \{(n, 0, +1), 2(n, 1, +1), (n, 2, +1)\}$.

3.2. Реализация минимальных периодических наборов в изотопических классах, отличных от тождественного

Модельный диффеоморфизм f_{i,j_i} , реализующий один из минимальных допустимых наборов P_{i,j_i}^{min} в изотопическом классе матрицы A_i , $i \in \{2, \dots, 6\}$, будем строить как суперпозицию $f_{i,j_i} = g_{i,j_i}h_i$, где h_i — периодический диффеоморфизм, определяемый формулой $h_i(x, y) = A_i * (x, y)^T (\text{mod } 1)$, а $g_{i,j_i} : T^2 \rightarrow T^2$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, изотопный тождественному, траектории которого инвариантны относительно диффеоморфизма h_i , $i \in \{2, \dots, 5\}$, $j_i \in \{1, \dots, 9\}$. Все диффеоморфизмы из множества $\{g_{i,j_i}\}$ можно получить как сдвиг на единицу времени (в положительном либо в отрицательном направлении) вдоль траекторий потоков X_1^t, \dots, X_9^t , фазовые портреты которых приведены на рис. 2. Минимальные наборы периодических данных в каждом изотопическом классе и соответствующие каждому набору потоки приведены в таблице 1.

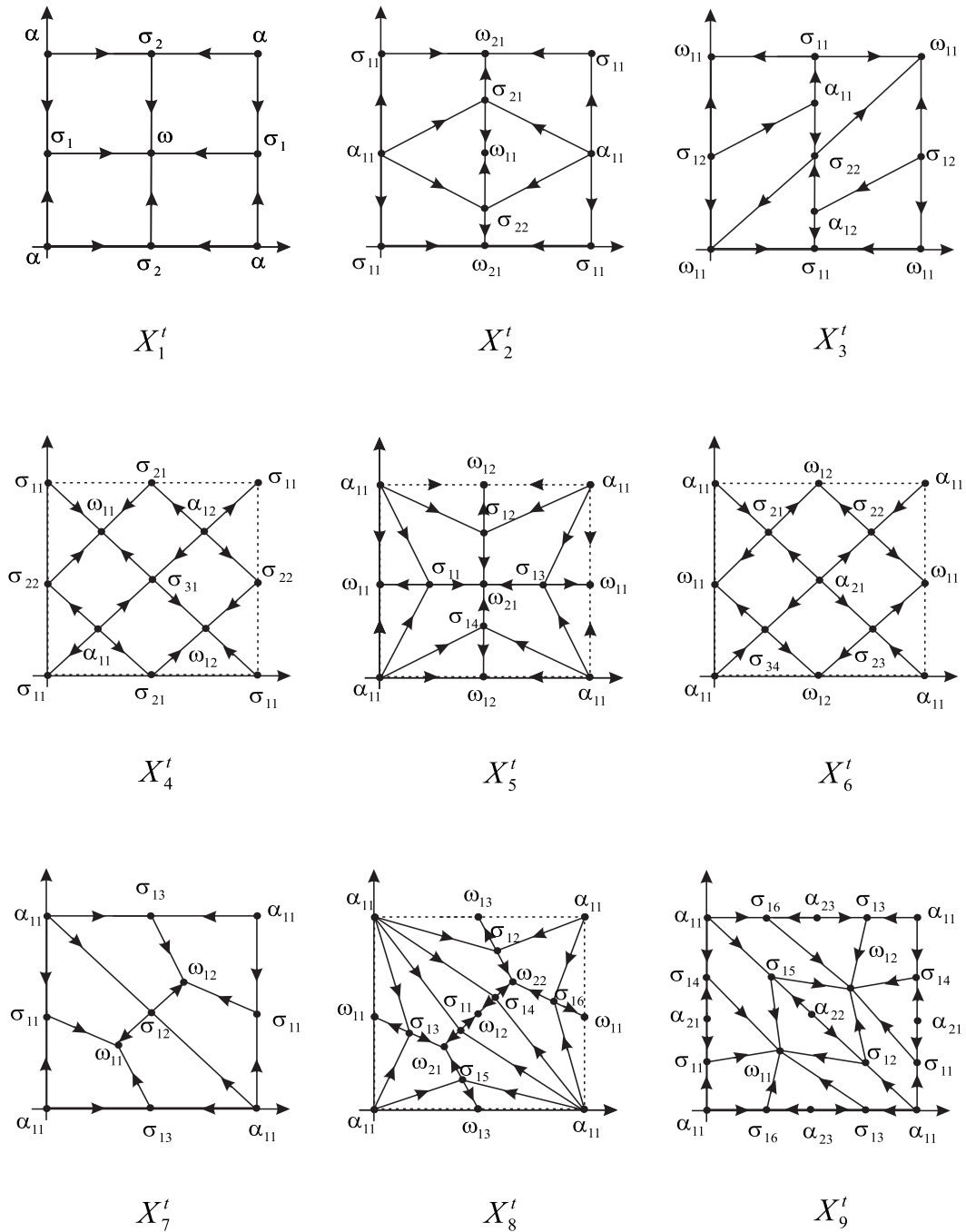
Рис. 2: Фазовые портреты потоков X_1^t, \dots, X_9^t

Таблица 1: К реализации минимальных наборов

Минимальный допустимый набор	Вспомогательный поток
$P_{2,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 1, +1)\}$	X_2^t
$P_{2,2} = \{(1, 0, +1); (1, 1, -1); 2(1, 2, +1); (2, 1, +1)\}$	X_2^{-t}
$P_{2,3} = \{(1, 0, +1); 2(1, 1, -1); (1, 2, +1)\}$	X_1^t
$P_{2,4} = \{(1, 0, +1); 3(1, 1, -1); (2, 2, +1)\}$	X_3^t
$P_{2,5} = \{3(1, 1, -1); (1, 2, +1); (2, 0, +1)\}$	X_3^{-t}
$P_{2,6} = \{4(1, 1, -1); (2, 0, +1); (2, 2, +1)\}$	X_4^t
$P_{2,7} = \{3(1, 0, +1); (1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	X_5^t
$P_{2,8} = \{(1, 0, +1); 3(1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	X_5^{-t}
$P_{2,9} = \{2(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); 2(2, 1, +1)\}$	X_6^t
$P_{3,1} = \{2(1, 0, +1); (1, 2, +1); (3, 1, +1)\}$	X_7^t
$P_{3,2} = \{(1, 0, +1); 2(1, 2, +1); (3, 1, +1)\}$	X_7^{-t}
$P_{4,1} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 1, -1)\}$	X_1^t
$P_{4,2} = \{2(1, 0, +1); (2, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	X_6^t
$P_{4,3} = \{(2, 0, +1); 2(1, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	X_6^{-t}
$P_{4,4} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 2, +1); (4, 1, +1)\}$	X_5^{-t}
$P_{4,5} = \{(1, 0, +1); (1, 2, +1); (2, 0, +1); (4, 1, +1)\}$	X_5^t
$P_{5,1} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 1, -1)\};$	X_7^{-t}
$P_{5,2} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 1, -1)\};$	X_7^t
$P_{5,3} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 0, +1); (6, 1, +1)\}$	X_8^t
$P_{5,4} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 0, +1); (6, 1, +1)\}$	X_8^{-t}
$P_{5,5} = \{(1, 2, +1); (2, 0, +1); (3, 2, +1); (6, 1, +1)\}$	X_9^t
$P_{5,6} = \{(1, 0, +1); (2, 2, +1); (3, 2, +1); (6, 1, +1)\}$	X_9^{-t}

Для получения формул, описывающих каждый из потоков X_1^t, \dots, X_9^t , можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [8], где получена полная топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях посредством трехцветных графов. Идея реализации состоит в следующем. Для любого потока X_j^t замыкания всех сепаратрис седловых состояний равновесия разбивают тор на несвязные компоненты, названные в [1] ячейками, состоящие из блуждающих траекторий, идущих от источника α к стоку ω , входящим в границу ячейки. Канонической моделью ячейки является внутренность квадрата $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, в котором задан поток Z^t системой уравнений $\dot{x} = \sin \pi x$, $\dot{y} = \sin \pi y$. Для получения искомого потока X_j^t склеим необходимое число копий квадрата D по схеме, определенной фазовым портретом, в силу диффеоморфизма, сопрягающего ограничения потока Z^t на соответствующую компоненту границы. Сгладив полученный поток в точках примыкания вершин треугольников, получим поток X_j^t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966.
2. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения* / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985, 33–37.
3. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62-86.
4. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011.
5. D. Rolfsen, “Knots and links”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **450**:1 (2003), 26-28.
6. Shub M., “Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology”, *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, salvador, 1971)*, Academic Press, New York, 1973.
7. Batterson S., “The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256**. (1979), 395-403.
8. Ошемков А.А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93-140.
9. Epstein D.B.A., “Curves on 2-manifolds and isotopies”, *Acta math.*, **115** (1966), 83–107.
10. John M.Franks, “A Reduced Zeta Function for Diffeomorphisms”, *American Journal of Mathematics*, **100**:2 (978), 217-243.

Realization of isotopic classes of gradient-like diffeomorphisms on torus

© Е. Ya. Gurevich⁵, D. T. Syainova⁶

Abstract. We specify S. Batterson’s results of [7] where classes of isotopic maps on torus contained Morse-Smale diffeomorphisms are described. Following to ideas of paper [7], we describe isotopic classes, contained gradient-like diffeomorphisms, present all admitted types of periodic data of such diffeomorphisms and provide an algorithm of realization of each type of periodic data.

Key Words: isotopic classification, Morse-Smale dynamical system, cascades, gradient-like diffeomorphisms.

⁵ Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dymanics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod; elena_gurevich@list.ru.

⁶ Student of Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod.