УДК 517.9

Нелокальная разрешимость одного варианта системы Франкля

© **Т. А. Шемякина**[1]

Аннотация. Получены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для одного варианта системы Франкля. Исследование рассмотренной задачи основано на методе дополнительного аргумента.

Ключевые слова: система Франкля, квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента

1. Введение

Рассмотрим систему Франкля в общем виде, представимую нелинейной системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\begin{cases} A_{11}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + B_{11}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + B_{12}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = f_1, \\ A_{21}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + B_{21}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + B_{22}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = f_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

где коэффициенты $A_{ij}, B_{ij}, f_i (i,j = 1,2)$ – нелинейные функции переменных x, y, u, v.

Система Франкля (1.1) относится к системе уравнений смешанного типа: при $d > 0$, $d_A \neq 0$ – гиперболический случай; при $d < 0$, $d_A \neq 0$ – эллиптический случай, где

$$d := \left(\begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \right)^2 - 4 * \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}; \quad d_A := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Система Франкля (1.1) описывает различные задачи в области геофизики, гидро - газодинамики, механики газового спрайта, в теории переноса нейтронов, в теории термоупругости и т.д. В частном случае система (1.1) описывает процессы движения газа с дозвуковыми, сверхзвуковыми и трансзвуковыми скоростями. Ф.И. Франкль [1] впервые связал физические исследования уравнений газовой динамики с математическими исследованиями уравнений смешанного типа.

Исследуется система Франкля (1.1) методом дополнительного аргумента (МДА). Для частного случая системы Франкля разработан принципиально новый способ применения метода дополнительного аргумента и на его основе найдены условия локальной разрешимости отдельно для эллиптической и гиперболической областей, определены границы интервала существования гладкого ограниченного решения [2], [3], [4], [5].

В работе найдены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для одного варианта системы Франкля – системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (1.1).

[1] Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh_tat@mail.ru.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему Франкля (1.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + b_{11}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + b_{21}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где коэффициенты $A_{11} = A_{22} = 1, A_{12} = A_{21} = 0$; $B_{11} = B_{22} = b_{11} = b_{22} = \alpha \cdot u$; $\alpha - const$; $B_{12} = b_{12}(x, y, u, v), B_{21} = b_{21}(x, y, u, v)$, $f_1 = f_2 = 0$.

Матрицы имеют вид:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u & b_{12} \\ b_{21} & \alpha \cdot u \end{pmatrix}$, $d = 4 \cdot b_{12} \cdot b_{21} > 0$, $d_A = 1 \neq 0$.

Система Франкля (2.1) является системой уравнений гиперболического типа. Матрица B обладает двумя независимыми вещественными собственными векторами и соответствующими различными собственными числами:

$$\vec{\xi_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\xi_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \alpha \cdot u \mp c(v); \quad c(v) = \sqrt{b_{12}b_{21}}.$$

Поставим задачу Коши для системы уравнений (2.1) в области

$$\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\, 0 \leq y \leq Y,\, Y > 0\}$$

с начальными условиями для неизвестных функций:

$$u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x),\ x \in (-\infty, \infty), \tag{2.2}$$

где $u_0(x), v_0(x)$ – известные функции, удовлетворяющие условию:

$$u_0'(x) > \sqrt{b_{12} * b_{21}} = c(v_0). \tag{2.3}$$

Исследуем задачу Коши для системы Франкля (2.1), (2.2) в гиперболическом случае методом дополнительного аргумента.

3. Нелокальные условия существования решения

Для исследования разрешимости задачи Коши (2.1), (2.2) также как в работах [2], [3], [4], [5] будем применять метод дополнительного аргумента. При этом сначала приведем исходную систему Франкля (2.1) к характеристической форме, когда каждое уравнение содержит производные только одной неизвестной функции. Это осуществляется с помощью введения новых неизвестных функций, которые называют инвариантами Римана:

$$\begin{cases} z_1(x, y) = u(x, y) - \varphi(v), \\ z_2(x, y) = u(x, y) + \varphi(v); \qquad \varphi(v) = \int \frac{c(v)}{b_{21}} dv = \int \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} dv. \end{cases} \tag{3.1}$$

В результате алгебраических преобразований система уравнений Франкля (2.1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} + (\alpha \cdot u(x,y) - c(v))\dfrac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z_2(x,y)}{\partial y} + (\alpha \cdot u(x,y) + c(v))\dfrac{\partial z_2(x,y)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В последней системе уравнений старые переменные u, v заменим новыми - z_1, z_2:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} + (a \cdot z_1(x,y) + b \cdot z_2(x,y))\frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z_2(x,y)}{\partial y} + (c \cdot z_1(x,y) + g \cdot z_2(x,y))\frac{\partial z_2(x,y)}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Это следует из того, что преобразование (3.1) имеет обратное и однозначно определяются функции:

$$u(x,y) = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad \varphi(v) = \frac{z_2 - z_1}{2}.$$

Так как $\varphi'(v) > 0$, то из последней формулы также однозначно определяются

$$v = \varphi^{-1}(z_2 - z_1), \quad c(v) = c(\varphi^{-1}(z_2 - z_1)) = \psi(z_2 - z_1).$$

Пусть, в частном случае, имеем представление $\psi(z_2 - z_1) = \beta(z_2 - z_1)$, тогда получим выражения в виде:

$$\lambda_1 = \alpha\frac{z_1 + z_2}{2} - \beta(z_2 - z_1) = az_1 + bz_2;$$

$$\lambda_2 = \alpha\frac{z_1 + z_2}{2} + \beta(z_2 - z_1) = bz_1 + az_2.$$

Предполагаем, что справедливы соотношения:

$$a = (\frac{\alpha}{2} + \beta) > 0, \quad b = (\frac{\alpha}{2} - \beta) > 0,$$

тогда следует неравенство для констант α, β :

$$-(\frac{\alpha}{2}) < \beta < (\frac{\alpha}{2}).$$

Рассмотрим некоторые варианты коэффициентов собственных значений $\lambda_{1,2}$:

$$1.\, \alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{4}: \quad a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}; \qquad 2.\, \alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{6}: \quad a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3};$$

$$3.\, \alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{10}: \quad a = \frac{3}{5}, b = \frac{2}{5}.$$

Простейшую модель неустановившегося движения газа – одномерного плоского изэнтропического течения газа [7], можно описать системой уравнений Франкля при следующих значениях:

$$\alpha = 1, \quad b_{12} = \frac{c^2(v)}{v}; \quad c^2(v) = v^{\gamma-1}, \quad c(v) = v^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\varphi(v) = \frac{2}{\gamma - 1}c(v); \quad c(v) = \frac{(\gamma-1)(z_2 - z_1)}{4};$$

тогда имеем:

$$\lambda_1 = z_1(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}) + z_2(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}) = az_1 + bz_2;$$

$$\lambda_2 = z_1(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}) + z_2(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}) = az_1 + bz_2;$$

В этих обозначениях газ описывается величинами:
u – скорость течения газа;
v – плотность газа т.е. масса, содержащаяся в единице объема;
$c(v)$ – изотермическая скорость звука;
$\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ – показатель адиабаты, т.е. отношение удельных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении соответственно.

При определенных значениях γ получим соответствующие варианты коэффициентов собственных значений $\lambda_{1,2}$:

$$1.\, \gamma = 2: \quad a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}; \qquad 2.\, \gamma = \frac{5}{3}: \quad a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}; 3.\, \gamma = \frac{7}{5}: \quad a = \frac{3}{5}, b = \frac{2}{5},$$

где справедливы соотношения:

$$a = (\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}) > 0, \quad b = (\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}) > 0, \quad \gamma \neq 1.$$

Определим условия для начальных функций z_{10}, z_{20} через коэффициенты исходной системы Франкля (2.1) и начальные условия (2.2):

$$z'_{10}(x, y) = u'_0(x, y) - c(v_0) > 0, \quad z'_{20}(x, y) = u'_0(x, y) + c(v_0) > 0.$$

Таким образом, система уравнений (3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} + (a \cdot z_1 + b \cdot z_2)\frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z_2(x,y)}{\partial y} + (b \cdot z_1 + a \cdot z_2)\frac{\partial z_2(x,y)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальными условиями на неизвестные функции:

$$z_1(x, 0) = z_{10}(x), \quad z_2(x, 0) = z_{20}(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{3.4}$$

где $(x, y) \in \Omega := (-\infty, \infty) \times [0, Y]$;
$a, b, c, g, Y, z'_{10}, z'_{20}$ – известные положительные константы.

Задача (3.3), (3.4) является характеристической формой для одного варианта системы Франкля (2.1). Для более общей характеристической формы (3.2) системы уравнений (2.1) в работе [6] получены условия нелокальной разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Эти условия сформулированы в виде теоремы:

Т е о р е м а 3.1. *Пусть функции* z_{10}, z_{20} $\in \bar{C}^2(R^1)$ *и выполнены условия:*
1. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $g > 0$,
2. $z'_{10} > 0$, $z'_{20} > 0$.
Тогда для любого $Y > 0$ *задача Коши (3.2), (3.4) имеет единственное решение* $z_1(x, y) \in \bar{C}^{2,1,2}(R^1 \times [0, Y])$, $z_2(x, y) \in \bar{C}^{2,1,2}(R^1 \times [0, Y])$.

Следовательно, для нелокальной разрешимости задачи Коши одного варианта системы Франкля (2.1), (2.2) с характеристической формой вида (3.3) необходимо потребовать выполнения еще условия (2.3).

В заключение отметим, что метод дополнительного аргумента работе в [6] позволил не только определить условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с разными характеристическими направлениями гиперболического типа, найти глобальные оценки для решения задачи (3.2), (3.4), но и эффективно находить численное решение в исходных переменных.

Список литературы

1. Франкль Ф. И., *Избранные труды по газовой динамике*, Наука, М., 1973, 712 с.

2. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Круц К. Г., "Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае", *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям*, 2006, № 35, 142–147.

3. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Чезганов В. Г., "Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в эллиптическом случае", *Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям*, 2006, № 35, 148–152.

4. Шемякина Т. А., "Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае", *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 127–131.

5. Шемякина Т. А., "Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа", *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, 2012, № 2 (146), 130–131.

6. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В., "Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка", *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, 2012, № 3 (177), 190–201.

7. Рождественский Б. Л., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978, 592 с.

Дата поступления 10.05.2014

Nonlocal solvability of one embodiment of the Frankl system

© **T. A. Shemyakina**[2]

Abstract. Conditions of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a Frankl system are received. The investigation of the considered problem is based on the method of an additional argument.

Key Words: the Frankl system, the quasilinear first order partial differential equations, Cauchy problem, the method of an additional argument

[2] Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg; sh_tat@mail.ru.