УДК 517.929

Задача исследования устойчивости интегральных многообразий

© А. В. Зубов[1], С.В. Зубов[2], И.С. Стрекопытов[3], Н.Н. Учватова[4]

Аннотация. В статье рассмотрены новые методы исследования устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены определения интегрального многообразия, положительной и отрицательной определенности функции.

Ключевые слова: автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, устойчивость по Ляпунову, интегральное многообразие.

1. Введение

При компьютерном моделировании динамики управляемых систем чрезвычайно важным является вопрос о том, как исследовать поведение системы при различных начальных данных. Можно, естественно, применять численное интегрирование для различных наборов начальных данных, принадлежащих некоторому множеству. Это приводит к значительным и даже неограниченным вычислительным затратам. Поставим вопрос: возможно ли, предварительно вычислив некоторый фиксированный набор решений, сделать выводы о поведении целого множества решений, множество начальных данных которых представляет компактное множество?

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = O(X), \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\star$ - вектор фазового состояния системы, $O(X)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Пусть для системы (2.1) множество M, являющееся пересечением k поверхностей:

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.2}$$

. . . .

[1] Профессор кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент кафедры Теории управления; СПбГУ; ddemidova@mail.ru

$$\Phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

является интегральным многообразием, т.е. из $X_0 \in M$ следует $X(t, X_0) \in M$ при $t \geq 0$, где $X(t, X_0)$ - решение (2.1), удовлетворющее условию $X = X_0$ при $t = 0$. Будем называть множество (2.2) *равновесным режимом системы* (2.1). Пусть векторы $b_j = \nabla\Phi_j / \|\nabla\Phi_j\|$ $(j = 1, \dots, k)$ определены и линейно независимы в каждой точке M. Построим в каждой точке $m \in M$ ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на векторы $b_1, b_2, \dots, b_k$, и выберем в нем произвольный ортонормальный базис $b_{k+1}, \dots, b_n$. Пусть векторы $b_1, b_2, \dots, b_n$ непрерывно дифференцируемы по компонентам вектора X в каждой точке M. Пусть $\rho(X, M)$ - расстояние от точки X до множества $M, S(M, \delta)$ - множество точек X таких, что $\rho(X, M) < \delta$. Введем в рассмотрение P_m - нормальную к M k - мерную плоскость, определяемую уравнениями

$$(X - m, b_s|_{X=m}) = 0,\ S = k + 1, \dots, n; \tag{2.3}$$

P_m проходит через точку $m \in M$.

Рассмотрим систему n уравнений (2.2), (2.3). Применим теорему о неявной функции. Рассмотрим функциональный определитель этой системы относительно компонент вектора m. Если Якобиан системы $n - k$ уравнений (2.3) относительно компонент вектора $m = (m_1, \dots, m_{n-k})^\star$ отличен от нуля на M, то в некоторой окрестности M существует функция $m = m(X)$, непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора X.

Введем новую систему координат $y_1, \dots, y_n$ с центром в точке $m \in M$ и ортами $b_1, \dots, b_n$. Матрицу перехода обозначим B. Получим соотношения

$$X = m(X) + BY,\ Y = B^{-1}(\dot{X} - m(X)). \tag{2.4}$$

Отметим, что $y_{k+1} \equiv \ldots \equiv y_n \equiv 0$. Это следует из (2.3), (2.4). Составим систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют переменные $y_1, \dots, y_k$. Из (2.4), (2.1) имеем

$$\dot{Y} = B^{-1}(-\dot{B}Y + O(Y) - \frac{D_m}{DX}O(X)). \tag{2.5}$$

Здесь $\frac{D_m}{DX} = \frac{D(m_1, \dots, m_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \{\frac{\partial m_i}{\partial x_j}\}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 2.1. *Равновесный режим M называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) < \delta$ будет $\rho(X(t, X_0), M) < \varepsilon$ для любого $t \geq 0$. Устойчивый режим называется асимптотически устойчивым, если δ можно выбрать так, чтобы выполнялось $\rho(X(t, X_0), M) \to_{t \to +\infty} 0$.*

Система (2.1), (2.5) имеет интегральное многообразие

$$Y = 0,\ \Phi_j(X) = 0,\ j = 1, \ldots, k. \tag{2.6}$$

О п р е д е л е н и е 2.2. *Интегральное многообразие* (2.6) *системы* (2.1), (2.5) *называется устойчивым по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$ *такое, что при* $\|Y_0\| < \delta$ *будет* $\|Y(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon$ *при* $t \geq 0$ *для всех* $X_0 \in E_n$. *Если к тому же* δ *можно выбрать так, что выполняется* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $X_0 \in E_n$, *многообразие* (2.6) *называется асимптотически устойчивым по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X.

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы равновесный режим системы* (2.1) *был устойчив (асимптотически устойчив), необходимо и достаточно, чтобы семейство* (2.6) *было устойчиво (асимптотически устойчиво) по отношению к компонентам вектора* Y *равномерно по отношению к компонентам вектора* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть равновесный режим (2.2) системы (2.1) устойчив (асимптотически устойчив). Тогда по определению, пользуясь соотношениями (2.4), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при выполнении условия $\rho(X_0, M) = \|BY_0\| < \delta\sqrt{n}$ будет выполняться

$$\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| \leq \varepsilon\sqrt{n}\,\text{РїСЂРё}\,t \geq 0$$

$$(\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| \to 0\,\text{РїСЂРё}\,t \to \infty),$$

т.е. имеем устойчивость (асимптотическую устойчивость) семейства (2.6) относительно V равномерно по X, так как X не входит в оценки выражений $\|BY_0\|$, $\|BY(t, Y_0, X_0)\|$.

Достаточность. Пусть семейство (2.6) устойчиво (асимптотически устойчиво) по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X. Тогда из (2.4) имеем, что $\forall\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) = \|BY_0\| < \delta\sqrt{n}$ будет выполняться

$$\rho(X(t, X_0), M) = \|BY(t, Y_0, X_0)\| < \varepsilon\sqrt{n}\,\text{РїСЂРё}\,t \geq 0$$

$$(\rho(X(t, X_0), M) \to 0)\,\text{РїСЂРё}\,t \to \infty),$$

т.е. режим (2.2) системы (2.1) устойчив (асимптотически устойчив).
Доказательство закончено.

Определение 2.3. *Функция $V(Y,X)$ называется положительно определенной по отношению к компонентам вектора Y равномерно по X, если выполнены следующие условия:*

1) $V(Y,X)$ задана при $X \in E_n$, $\|Y\| < \alpha$ вещественная и непрерывная, $V(0,X)=0$, α - некоторая положительная постоянная.

2) для достаточно малого $C_2 > 0$ можно указать такое $C_1 > 0$, что при $\|Y\| > C_2$ будет $V(Y,X) > C_1$ при $X_0 \in E_n$.

Теорема 2.2. *Если существует функция $V(Y,X)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $V(Y,X)$ положительно определенная по отношению к компонентам вектора Y равномерно по X;

2) функция $V(Y,X) \to_{Y\to 0} 0$ равномерно по отношению к $X_0 \in E_n$;

3) полная производная функции $V(Y,X)$ в силу системы (2.4)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\dot{Y} = W(Y,X)$$

непрерывна и неположительна; то многообразие (2.2) *системы* (2.1) *будет устойчивым.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим сферу $\|Y\| = \varepsilon$. Найдем наименьшее значение $V(Y,X)$, $X_0 \in E_n$ на этой сфере. Это, очевидно, можно сделать в силу условия 1). Пусть при $\|Y\| = \varepsilon$, $X_0 \in E_n$

$$inf V(Y,X) = \omega.$$

В силу непрерывности $V(Y,X)$ существует $\delta > 0$ такое, что $V(Y,X) < \omega$ для $\|Y\| < \delta$, $X_0 \in E_n$. Покажем, что это δ отвечает ε в определении 2.2.. Пусть $\|Y\| < \delta$. Тогда $V(Y_0,X_0) < \omega$ при $X_0 \in E_n$, и так как V не возрастает в силу условия 3), то

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| < \delta \,\text{при всех}\, t \geq 0, X_0 \in E_n.$$

Следовательно,

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| < \varepsilon \,\text{при всех}\, t \geq 0,\ X_0 \in E_n,$$

Ибо в противном случае существует $T > 0$ такое, что $\|Y(T,Y_0,X_0)\| = \varepsilon$. Тогда $V(Y(T,Y_0,X_0), X(T,Y_0,X_0)) \geq \omega$. Полученное противоречие показывает, что при выполнении условий теоремы интегральное многообразие (2.6)

устойчиво по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X. Следовательно, по теореме 2.1., равновесный режим (2.2) системы (2.1) устойчив.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 2.3. *Если существует функция $V(Y,X)$, удовлетворяющая 1) и 2) теоремы 2.2., и функция $W(Y,X)$ является отрицательно определенной по отношению к компонентам вектора Y равномерно по отношению к компонентам вектора X, то равновесный режим* (2.2) *системы* (2.1) *асимптотически устойчив.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| \to_{X_0\in E_n} 0 \,\text{при}\, t\to\infty$$

т.е. по любому $\varepsilon>0$ можно указать $T(\varepsilon)$:

$$\|V(t,Y_0,X_0)\| < \varepsilon\, \forall t \geq T(\varepsilon),\, \forall X_0\in E_n.$$

Действительно, по заданному ε по теореме 2.2. можно найти δ ($\delta<\varepsilon$), удовлетворяющее определению устойчивости 2.2.. При этом возможны два случая:

1) существует T такое, что

$$\|Y(T,Y_0,X_0)\| < \delta \,\text{при}\, \|Y_0\| < \delta, X_0\in E_n;$$

следовательно,

$$Y(t,Y_0,X_0)\| < \varepsilon\, \forall t\geq T,\, \forall X_0\in E_n;$$

2) не существует такого T, т.е. $\forall t>0$ всегда будет

$$\|Y(t,Y_0,X_0)\| \geq \delta.$$

Во втором случае, в силу условия 3) имеем, что функция W является положительно определенной относительно компонент вектора Y равномерно относительно компонент вектора X, т.е. $-W\geq\alpha>0$. Следовательно, всегда

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$V(Y(t,Y_0,X_0),X(t,Y_0,X_0)) \leq -\alpha t + V(Y_0,X_0).$$

Правая часть этого неравенства с ростом t стремится к $-\infty$, а функция V удовлетворяет неравенству

$$V(Y(t,Y_0,X_0),X(t,Y_0,X_0)) \geq \beta > 0,\ \|Y(t,Y_0,X_0)\| \geq \delta > 0.$$

Таким образом, возможен лишь случай 1), а тогда в силу теоремы 2.1. равновесный режим (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчив. Доказательство закончено.

Замечание 2.1. *Из* (2.4) *мы имеем* $Y = B^{-1}(X - m(X)) = \Phi(X)$. *В некоторых случаях можно выразить* X *через* Y *в формулах* (2.5). *Это будет возможно, например, когда функции от* X *в правой части* (2.5) *являются функциями от* $\Phi(X)$. *Тогда мы получим систему*

$$\dot{Y} = G(Y), \tag{2.7}$$

где

$$G(Y) = B^{-1}(X(Y))(-\dot{B}Y + O(X(Y))) - \frac{D_m}{DX}(Y)O(X(Y)).$$

Теорема 2.4. *Для того чтобы равновесный режим* (2.2) *системы* (2.1) *был устойчив (асимптотически устойчив), необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение системы* (2.7) *было устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть равновесный режим устойчив (асимптотически устойчив). Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $X_0 \in S(M,\delta)$ выполнено $X(t,X_0) \in S(M,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$ для всех $t \geq 0$ $(\rho(X(t,X_0),M) \to_{t\to\infty} 0)$. Из соотношений (2.4) следует, что

$$X_0 - m_0 = B_0Y_0,\ \|Y_0\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Интегральная кривая системы (2.7) определяется формулой

$$Y(t,Y_0) = B^{-1}(X(t,X_0) - m(X(t,X_0))).$$

Следовательно, при $\|Y_0\| < \delta\sqrt{n}$ выполняется

$$\|Y(t,Y_0)\| < \varepsilon \quad (\|Y(t,Y_0)\| \to_{t\to\infty} 0).$$

Достаточность. Пусть нулевое решение устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво по Ляпунову). Тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|Y_0\| < \delta$ будем иметь $\|Y(t,Y_0)\| < \varepsilon\sqrt{n}$ для $t \geq 0$

($\|Y(t,Y_0)\| \to_{t\to\infty} 0$). Тогда, выбрав X_0 так, чтобы Y_0 в равенстве $Y_0 = B^{-1}(X_0 - m_0)$ удовлетворяло неравенству $\|Y_0\| < \delta$, будем иметь из формулы $X(t,X_0) - m(X(t,X_0)) = BY(t,Y_0)$, что $\rho(X(t,X_0),M) < \varepsilon$ при $t \geq 0$ ($\rho(X(t,X_0),M) \to_{t\to\infty} 0$).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Выводы

Показано, что задача об устойчивости стационарного интегрального многообразия сводится к задаче об устойчивости по части переменных нулевого решения специально построенной системы дифференциальных уравнений и дается метод ее построения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. №–10-08-000624).

Список литературы

1. С.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.

2. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.

3. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, *Динамаическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.

4. И.В.Зубов, Н.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб., 2012, 322 с.

5. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.

The task of investigation stability integral poly measures

© A. V. Zubov[5], S. V. Zubov[6], I. S. Zubov[7], N. N. Uchvatova[8]

Abstract. In article is looks the new methods of investigation stability systems ordinary differential equations. Is bring the definition of integral multitudes, positive and negative clarity of function.

Key Words: autonomous system of ordinary differential equations, Lyapunov stability, integral manifold

[5] Professor of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[6] Docent of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[7] Postgraduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[8] Docent of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru