УДК 519.3:62-50

Приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях для квазилинейных уравнений с частными разностями первого порядка

© Т. К. Юлдашев [1] М. А. Довгий[2]

Аннотация. В данной работе предлагается методика приближенного решения квазилинейного уравнения в частных разностях первого порядка и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях. С помощью нелинейного дискретного аналога метода характеристик начальная задача сводится к изучению нелинейного суммарного уравнения. Далее используется метод последовательных приближений.

Ключевые слова: оптимальное управление, разностное уравнение, суммарное уравнение, метод последовательных приближений, минимизация функционала

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс в области D описывается квазилинейным разностным уравнением вида

$$\Delta_n u(n,m) + A\big(n,m,u(n,m)\big)\Delta_m u(n,m) =$$
$$= \alpha(n)\sigma(n) + f\big(n,m,u(n,m)\big) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(n,m)_{|n=n_0} = \varphi(m), \tag{1.2}$$

где целочисленные функции $A\big(n,m,u\big)$, $f\big(n,m,u\big)$ определены для всех $n \geq n_0$, целочисленная функция $\varphi(m)$ определена для $m \in \mathbb{Z}$, $\Delta_n u(n,m) = u(n+1,m) - u(n,m)$, $\Delta_m u(n,m) = u(n,m+1) - u(n,m)$, $\alpha(n)$ – целочисленная функция, определенная при $n \geq n_0$, $D \equiv D_N \times \mathbb{Z}$, $D_N \equiv \big\{n_0 \leq n \leq N\big\}$, а n_0, n, N – натуральные числа, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Управление $\sigma(n)$ суммируемо с квадратом и удовлетворяет неравенству

$$\big|\sigma(n)\big| \leq M_0 = const. \tag{1.3}$$

Качества управления характеризуются функционалом

$$J\big[\sigma\big] = \sum_{n=n_o}^{N-1} \sum_{m=-m_o}^{m_0-1} K(m)u^2(n,m) + \gamma \sum_{n=n_o}^{N-1} \sigma^2(n), \tag{1.4}$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru;

[2] Студентка института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

где $0 < \sum\limits_{m=-m_o}^{m_0-1} K(m) < \infty$, γ – действительное число, m_0 – достаточно большое натуральное число.

Уравнения вида (1.1) при нулевом управлении являются дискретными аналогами дифференциальных уравнений, которые встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точных (частных) решений квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка при конкретных случаях нелинейных функций, входящих в данное уравнение [1]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективными являются те методы, которей позволяют поставленную задачу заменить с эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления [2] - [5]. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используются широкий спектр разных методов (см., напр. [5] - [7]).

Задача. Найти такое состояние $u^{\star}(n,m)$ начальной задачи (1.1), (1.2) при заданной управляющей функции

$$\sigma^{\star}(n) \in Q \equiv \left\{\sigma^{\star} : \left|\sigma^{\star}(n)\right| \leq M_0,\ n_0 \leq n \leq N\right\},$$

что доставляет минимум функционалу (1.4).

2. Разрешимость начальной задачи (1.1), (1.2)

При фиксированных значениях управления $\sigma(n)$ начальная задача (1.1), (1.2) эквивалентна следующему суммарному уравнению [8]

$$u(n,m) \equiv \Theta(n,m;u) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu, m, u(\nu,m)\big)\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu) + f\big(\nu, m, u(\nu,m)\big)\Big], \tag{2.1}$$

где m – целочисленный параметр.

Мы используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целочисленных функций, ограниченных по норме с положительным числом M; $Lip\Big\{L_{|u,v,\dots}\Big\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с положительным коэффициентом L.

В качестве нормы на множестве D для произвольной целочисленной функции $g(n,m)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|g(n,m)\| = \max\Big\{|g(n,m)| : n \in D_N, m \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\varphi(m) \in Bnd(M_1) \cap Lip\left\{L_{1|m}\right\}$, $0 < L_1 = const$;
2. $f(n,m,u) \in Bnd(M_2) \cap Lip\left\{L_{2|u}\right\}$, $0 < L_2 = const$;
3. $A(n,m,u) \in Lip\left\{L_{3|u}\right\}$, $0 < L_3 = const$;
4. $\rho = \big(L_1 L_3 + L_2\big)(N - n_0 - 1) < 1$.
Тогда суммарное уравнение (2.1) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$*, для которых выполняется условие (1.3), имеет единственное решение на множестве* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [8] - [11]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$u_0(n,m) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu,m,0\big)\right) + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu) + f\big(\nu,m,0\big)\Big], \qquad (2.2)$$

$$u_{\mu+1}(n,m) = \Theta(n,m;u_\mu),\ \mu = 0,1,2,\dots, \qquad (2.3)$$

где m – целочисленный параметр.

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (2.2) мы получим следующую оценку

$$\big\|u_0(n,m)\big\| \le M_1 + M_2(N - n_0 - 1). \qquad (2.4)$$

В силу условий теоремы, с учетом (2.4) из (2.2) и (2.3) для первого приближения имеем оценку

$$\big\|u_1(n,m) - u_0(n,m)\big\| \le$$

$$\le L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\big\|A\big(\nu,m,u_0\big) - A\big(\nu,m,0\big)\big\| + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\big\|f\big(\nu,m,u_0\big) - f\big(\nu,m,0\big)\big\| \le$$

$$\le \big(L_1 L_3 + L_2\big)(N - n_0 - 1)\big\|u_0(n,m)\big\| \le \left(M_1 + M_2(N - n_0 - 1)\right)\rho < M_1 + M_2(N - n_0 - 1). \qquad (2.5)$$

Аналогично, в силу условий теоремы, для произвольного натурального числа μ из (2.3) по индукции получаем

$$\left\|u_{\mu+1}(n,m)-u_{\mu}(n,m)\right\| \leq$$

$$\leq L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\|+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| \leq$$

$$\leq \rho\left\|u_{\mu}(n,m)-u_{\mu-1}(n,m)\right\| < \left\|u_{\mu}(n,m)-u_{\mu-1}(n,m)\right\|. \qquad (2.6)$$

Кроме того, для разности $u(n,m)-u_{\mu}(n,m)$ имеем оценку

$$\left\|u(n,m)-u_{\mu}(n,m)\right\| \leq \left\|u(n,m)-u_{\mu+1}(n,m)\right\| + \left\|u_{\mu+1}(n,m)-u_{\mu}(n,m)\right\| \leq$$

$$\leq L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)\right\|+$$

$$+L_1 \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|A\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)-A\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\|+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)\right\|+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left\|f\big(\nu,m,u_{\mu}(\nu,m)\big)-f\big(\nu,m,u_{\mu-1}(\nu,m)\big)\right\| \leq$$

$$\leq \rho\left\|u(n,m)-u_{\mu}(n,m)\right\| + \rho^{\mu}\left(M_1+M_2(N-n_0-1)\right).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$\left\|u(n,m)-u_{\mu}(n,m)\right\| \leq \frac{\rho^{\mu}\left(M_1+M_2(N-n_0-1)\right)}{1-\rho}. \qquad (2.7)$$

Из оценок (2.4) - (2.6) следует, что оператор в правой части (2.1) является сжимающим. Следовательно, задача (1.1), (1.1) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$, для которых выполняется условие (1.3), имеет единственное решение на множестве D.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Приближенный расчет функционала качества в задаче оптимального управления

Так как $\rho < 1$, то из (2.7) следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \left\| u(n,m) - u_\mu(n,m) \right\| = 0.$$

С учетом последовательности функций (2.3) функционал (1.4) запишем в виде

$$J_\mu[\sigma] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m) u_\mu^2(n,m) + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \sigma^2(n). \tag{3.1}$$

В силу условий теоремы, из (2.7) и (3.1) получаем следующую оценку

$$\left| J[\sigma] - J_\mu[\sigma] \right| \le 2\beta \frac{\rho^\mu \left(M_1 + M_2(N - n_0 - 1) \right)^2 (N - n_0 - 1)}{1 - \rho},$$

где $\beta = \sum\limits_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m) < \infty$.

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \left| J[\sigma] - J_\mu[\sigma] \right| = 0. \tag{3.2}$$

Пусть $\sigma^\star(n)$ – оптимальное допустимое управление в задаче. Тогда для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\left| \sigma^\star(n) - \sigma_\mu^\star(n) \right| \le q_\mu(n), \ \lim_{\mu\to\infty} q_\mu(n) = 0. \tag{3.3}$$

Рассмотрим следующие соотношения:

$$u^\star(n,m) \equiv \Theta\big(n,m;u^\star\big) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu, m, u^\star(\nu,m)\big) \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \Big[\alpha(\nu)\sigma^\star(\nu) + f\big(\nu, m, u^\star(\nu,m)\big) \Big], \tag{3.4}$$

$$u_0^\star(n,m) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A\big(\nu,m,0\big) \right) + \sum_{\nu=n_0}^{n-1} \left[\alpha(\nu)\sigma_0^\star(\nu) + f\big(\nu,m,0\big) \right], \tag{3.5}$$

$$u_{\mu+1}^\star(n,m) = \Theta\Big(n,m;u_\mu^\star\Big), \tag{3.6}$$

$$J_\mu[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m) \big(u_\mu^\star(n,m) \big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma^\star(n) \big)^2, \tag{3.7}$$

$$J_\mu[\sigma_\mu^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m)\big(u_\mu^\star(n,m)\big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma_\mu^\star(n)\big)^2. \tag{3.8}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1. и (3.3). Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty} \big|J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star]\big| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (3.3) из (3.4)-(3.6) имеем оценку

$$\big\|u^\star(n,m) - u_\mu^\star(n,m)\big\| \le \frac{\rho^\mu\big[M_1 + \big(M_2 + q_\mu(n)\big)(N-n_0-1)\big]}{1-\rho}. \tag{3.9}$$

Далее, с учетом (1.3) и (3.9) из (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\big|J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star]\big| \le 2\Big\{\beta\frac{\rho^\mu\big[M_1 + \big(M_2 + q_\mu(n)\big)(N-n_0-1)\big]^2}{1-\rho} +$$

$$+\gamma M_0 q_\mu(n)\Big\}(N-n_0-1).$$

Из последней оценки следует, что справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{\mu\to\infty} \big|J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star]\big| = 0. \tag{3.10}$$

С учетом оценки (3.2) и соотношение (3.10) для функционалов

$$J[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \sum_{m=-m_0}^{m_0-1} K(m)\big(u^\star(n,m)\big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{N-1} \big(\sigma^\star(n)\big)^2$$

и (3.8) получаем, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \big|J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star]\big| = \lim_{\mu\to\infty} \big|J[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma^\star]\big| + \lim_{\mu\to\infty} \big|J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma_\mu^\star]\big| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д., *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*, Физматлит, М., 2003, 416 с.

2. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.

3. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.
4. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.
5. Бутковский А. Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965, 474 с.
6. Рапопорт Э. Я., *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами*, Высшая школа, М., 2009, 680 с.
7. Юлдашев Т. К., "Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 78–89.
8. Yuldashev T. K., "On a first order quasilinear partial difference equation", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677–680.
9. Yuldashev T. K., "On a summery equation with weak nonlinear right-hand side", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95–98.
10. Yuldashev T. K., "On solvability and stability of solutions of linear integral and summary equations of first kind", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **17**:1 (2008), 41–56.
11. Yuldashev T. K., "On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation", *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83–88.

Approximate calculation of functionality of quality at known operating influences for quazilinear partial difference equation of the first order

© T. K. Yuldashev[3] M. A. Dovgiy[4]

Abstract. It is proposed in this paper a method of approximate studying the quasilinear partial difference equation of first order and approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. With the help of a nonlinear discrete method of characteristics the problem reduces to the study of nonlinear summary equation. Further, we use the discrete analog of the method of successive approximation.

Key Words: Optimal control, difference equation, summary equation, method of successive approximation, minimization of functional.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

[4] Student of Institute of Informatics and Telecommunication, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk