

УДК 51.7:532.546

Построение системы разностных уравнений методом Галеркина с использованием двумерного симплекса

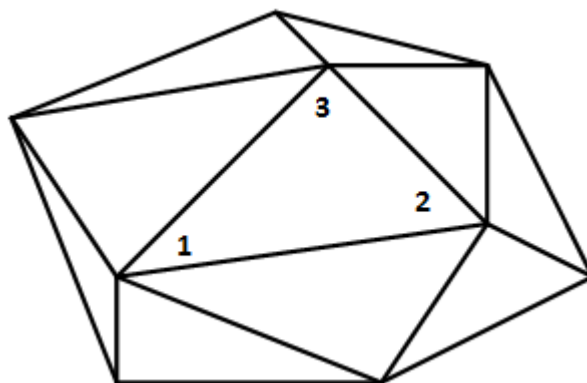
© Е. П. Еремина¹, Д. И. Бояркин²

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона. В работе построена система базисных функций для треугольной сетки. Сгенерирована система уравнений, построена разностная схема. Получены оценки для поперечников Колмогорова для треугольной и прямоугольной сеток, и проведен их сравнительный анализ.

Ключевые слова: базисные функции, форма Галеркина, поперечник Колмогорова, слабое решение

1. Аппроксимация многоугольной области

Под многоугольной областью понимается либо некоторая область в форме многоугольника, либо аппроксимация области другой формы. Многоугольник разбивается на треугольники. Рассмотрим линейную форму, приближающую функцию $f(x, y)$ на типичном треугольном элементе с вершинами (x_i, y_i) , $(i = 1, 2, 3)$ (Рис.1.1).



Р и с у н о к 1.1

Она имеет вид

$$p_1(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) f_i, \quad (1.1)$$

где $f_i = f(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3)$. Коэффициенты $\alpha_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ задаются формулами

¹ Магистрант 2-го года обучения, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; tremasovaer@gmail.ru.

² Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.ru.

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{23} + \eta_{23}x - \xi_{23}y), \quad (1.2)$$

$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{31} + \eta_{31}x - \xi_{31}y), \quad (1.3)$$

$$\alpha_3(x, y) = \frac{1}{C_{123}}(\tau_{12} + \eta_{12}x - \xi_{12}y), \quad (1.4)$$

где $|C_{123}|$ - удвоенная площадь треугольника, а

$$\tau_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \quad (1.5)$$

$$\xi_{ij} = x_i - x_j, \quad (1.6)$$

$$\eta_{ij} = y_i - y_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.7)$$

Полная базисная функция относительно некоторой вершины получается суммированием частей, связанных с треугольниками, которые примыкают к вершине.

2. Построение системы базисных функций для случая конечного элемента двумерного симплекса

Любую область в двумерном пространстве можно аппроксимировать многоугольниками, которые всегда можно разбить на конечное число треугольников. Полный полином порядка m

$$\prod_{k+l=0}^m a_{kl} x^k y^l \quad (2.1)$$

может быть использован для представления функции $U(x, y)$, по значениям, в $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ узлах треугольника. Для случая $m=1$ интерполяционный полином имеет вид:

$$\prod_1(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2(x) + \alpha_3 y = \sum_{j=1}^3 U_j p_j^1(x, y). \quad (2.2)$$

Значения U_j ($j=1, 2, 3$) являются значениями искомой функции $U(x, y)$ соответственно в вершинах p_j ($j=1, 2, 3$), а p_j имеют следующий вид:

$$p_j^1 = \frac{1}{C_{jkl}}(\tau_{kl} + \eta_{kl}x - \xi_{kl}y) = \frac{D_{kl}}{C_{jkl}}, \quad (2.3)$$

где τ_{kl} , ξ_{kl} , η_{kl} задаются формулами (1.5)- (1.7),

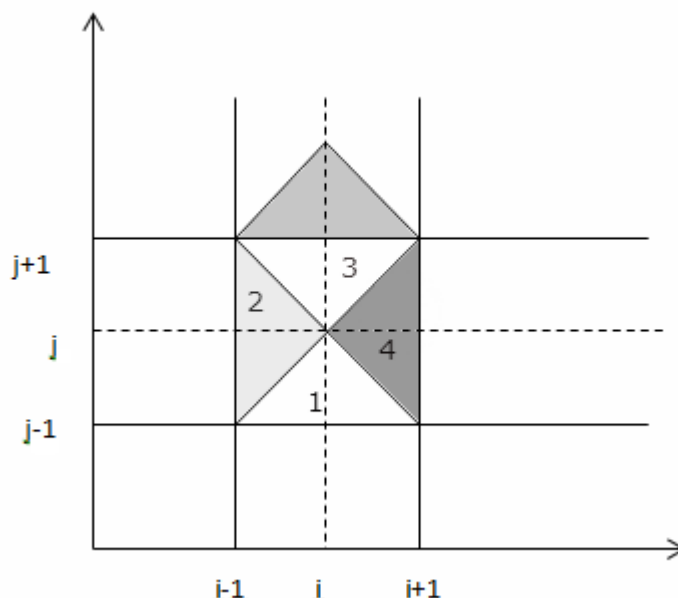
$$D_{kl} = \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$C_{jkl} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Нетрудно заметить, что

$$p_j^1 = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k \ (1 \leq j, k \leq 3). \end{cases} \tag{2.6}$$

Рассмотрим сетку, изображенную на рисунке 2.1.



Р и с у н о к 2.1

Точку (i, j) будем окружать прямоугольными треугольниками с высотой h и основанием $2h$. Зафиксируем вершину (i, j) и рассмотрим треугольник (1). Для треугольника (1) найдем функции $p_{i,j}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j-1}$.

$$p_{i,j} = \frac{D_{k,l}}{C_{p,k,l}} = \frac{2h(y_{j-1} - y)}{-2h^2} = \frac{y - y_{j-1}}{h}, \tag{2.7}$$

$$p_{i+1,j-1} = \frac{(x - x_i) + (y_j - y)}{2h}, \tag{2.8}$$

$$p_{i-1,j-1} = \frac{(x_i - x) + (y_j - y)}{2h}. \tag{2.9}$$

Нетрудно заметить, что для функций $p_{i,j}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j-1}$ выполняется условие (2.6). Найдем аналогичным образом функции $p_{i,j}$, $p_{i-1,j+1}$, $p_{i+1,j-1}$, $p_{i-1,j-1}$, $p_{i+1,j+1}$. Получим систему функций и их производных.

Базисная функция	Треугольник	Производная $\frac{\partial p}{\partial x}$	Производная $\frac{\partial p}{\partial y}$
$p_{ij} = \frac{y - y_{j-1}}{h}$	(1)	0	$\frac{1}{h}$
$p_{ij} = \frac{x - x_{i-1}}{h}$	(2)	$\frac{1}{h}$	0
$p_{ij} = \frac{y_{j+1} - y}{h}$	(3)	0	$-\frac{1}{h}$
$p_{ij} = \frac{x_{i+1} - x}{h}$	(4)	$-\frac{1}{h}$	0
$\frac{p_{i-1j-1}}{(x_i - x) + (y_j - y)}$	= (1),(2)		
$\frac{p_{i-1j+1}}{(x_i - x) + (y - y_j)}$	= (3),(2)		
$\frac{p_{i+1j-1}}{(x - x_i) + (y_j - y)}$	= (1),(4)		
$\frac{p_{i+1j+1}}{(x - x_i) + (y - y_j)}$	= (3),(4)		

Таким образом получим систему базисных функций для $1 \leq i, j \leq m - 1$

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{y - y_{j-1}}{h}, & y_{j-1} \leq y \leq y_j; y - y_{j-1} - x_{i-1} \leq x \leq y - y_{j-1} - x_{i+1}; \\ \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; x - x_{i-1} + y_{j-1} \leq y \leq x_{i-1} - x + y_{j+1}; \\ \frac{y_{j+1} - y}{h}, & y_j \leq y \leq y_{j+1}; y_j - y + x_i \leq x \leq y - y_j - x_i; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}; x_i - x + y_j \leq y \leq x - x_i + y_j; \\ 0, & \text{при других значениях аргумента.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Частные производные базисных функций будут иметь вид для $1 \leq i, j \leq m - 1$

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; x - x_{i-1} + y_{j-1} \leq y \leq x_{i-1} - x + y_{j+1}; \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}; x_i - x + y_j \leq y \leq x - x_i + y_j; \\ 0, & \text{при других значениях аргумента.} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & y_{j-1} \leq y \leq y_j; y - y_{j-1} - x_{i-1} \leq x \leq y - y_{j-1} - x_{i+1}; \\ -\frac{1}{h}, & y_j \leq y \leq y_{j+1}; y_j - y + x_i \leq x \leq y - y_j - x_i; \\ 0, & \text{при других значениях аргумента.} \end{cases} \quad (2.12)$$

3. Генерация системы разностных уравнений

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in D \quad (3.1)$$

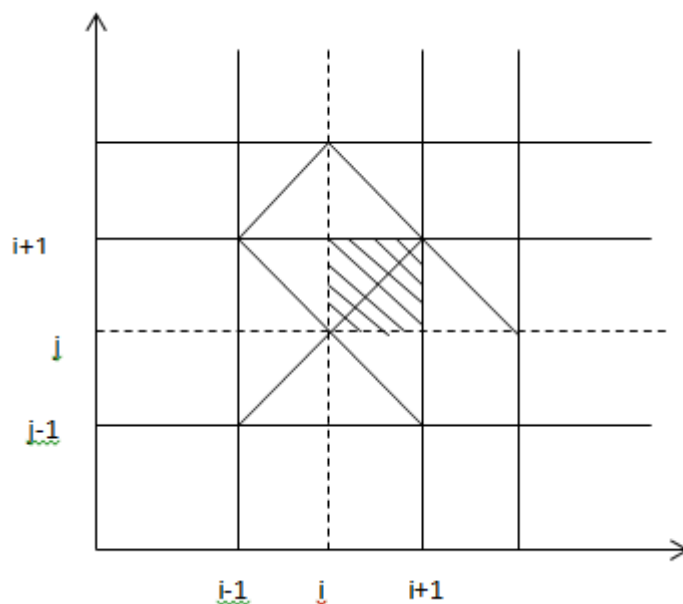
$$u(x,y)|_{\partial D} = 0. \quad (3.2)$$

Форма Галеркина для задачи Дирихле для задачи (3.1)-(3.2) имеет вид

$$\sum_{k,l=1}^{m-1} \tilde{u}_{k,l} \iint_D \left(\frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D f(x,y) \varphi_{i,j}(x,y) dx dy = 0. \quad (3.3)$$

Построим разностную схему на основе выражения для нахождения коэффициентов $\tilde{u}_{k,l}$.

Для нахождения коэффициентов рассмотрим случаи, когда k, l принимают значения $i + 1, j + 1, i - 1, j + 1, i + 1, j - 1, i - 1, j - 1, i, j$. При других значениях k, l значения интегралов перед коэффициентами $\tilde{u}_{k,l}$ будут равны нулю, так как базисные функции имеют локальный носитель. Рассмотрим случай $k = i + 1, l = j + 1$



Р и с у н о к 3.1

$$\iint_D \left(\frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{k,l}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = \quad (3.4)$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_j+(x-x_i)} \left(\frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dx dy + \quad (3.5)$$

$$+ \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_i+(y-y_j)} \left(\frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{i+1,j+1}(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{i,j}(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = \quad (3.6)$$

$$= -\frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

Аналогично коэффициенты перед значениями $\tilde{u}_{i-1,j-1}$, $\tilde{u}_{i+1,j-1}$, $\tilde{u}_{i-1,j+1}$ будут равны $-\frac{1}{2}$, а перед значением $\tilde{u}_{i,j}$ равен 2. Таким образом получим разностную схему

$$2\tilde{u}_{i,j} - \frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1,j-1} - \frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1,j+1} - \frac{1}{2}\tilde{u}_{i+1,j+1} - \frac{1}{2}\tilde{u}_{i+1,j-1} = - \int_0^1 \int_0^1 f(x_i, y_j) \varphi_{i,j}(x, y) dx dy, \tag{3.8}$$

$$1 \leq i, j \leq m - 1.$$

4. N-мерный колмогоровский поперечник

Введем следующие обозначения:

W - линейное пространство всех непрерывных в области D и на границе ∂D функций, обладающих ограниченными производными первого порядка, которые могут иметь разрывы лишь на конечном множестве прямых.

\tilde{W} - линейное пространство функций, состоящее из тех же функций, что и W , но со скалярным произведением (w, v)

$$(w, v) = \iint_D \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \tag{4.1}$$

Это скалярное произведение индуцирует норму $\|w\|_{\tilde{W}}^2 = (w, w)$ в пространстве \tilde{W} .

\tilde{W}^o - подпространство функций $w \in \tilde{W}$, удовлетворяющих условию $w|_{\partial D} = 0$.

Выбор базисных функций надо по возможности осуществить так, чтобы для каждой функции $v \in U \subset \tilde{W}^o$ нашлась такая функция $w_N \in \tilde{W}^N$, "близкая" к ней, для которой величина

$$\|\tilde{w}_N - u\|_{\tilde{W}}^2 = \min_{w \in \tilde{W}^N} (w - u, w - u). \tag{4.2}$$

Таким образом, наилучшим был бы такой выбор базисных функций, при котором число

$$K_N = K_N(U, \tilde{w}_N) = \sup_{v \in U} \min_{w \in \tilde{W}^N} \|\tilde{w}_N - v\|_{\tilde{W}} \tag{4.3}$$

было бы наименьшим возможным. Обозначим $\kappa(U, \tilde{W}^o)$ число

$$\kappa(U, \tilde{W}^o) = \inf_{w \in \tilde{W}^N} K_N(U, \tilde{w}_N). \tag{4.4}$$

Это число называется N -мерным колмогоровским поперечником класса функций U относительно нормированного пространства $\tilde{W}^o \in W$. Очевидно, что наилучшим выбором базисных функций был бы такой, при котором число (4.3) совпадало бы с поперечником А.Н. Колмогорова.

Теорема 1. Пусть U - множество всех функций, вторые производные которых непрерывны и не превосходят по модулю некоторого числа M , и которые обращаются в нуль на границе ∂D . Пусть для каждого N из некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел осуществлен выбор точек $Q_1^N, Q_2^N, \dots, Q_m^N$, где $m = m(N)$, разбиение многоугольника $D_N = Q_1^N Q_2^N \dots Q_m^N$ на треугольники, порождающее сетку $P_1^N, P_2^N, \dots, P_m^N$. Пусть при этом выполнены условия:

1⁰. Длина l любой стороны треугольника разбиения удовлетворяет неравенству

$$l \leq C_1 h, \quad (4.5)$$

$$h = \left[\frac{S_D}{N} \right]^{1/2}, \quad (4.6)$$

S_D - площадь треугольника.

2⁰. Площадь S_N области $D \setminus D_N$ удовлетворяет оценке

$$S_N \leq C_{2h}^2, C_2 = const. \quad (4.7)$$

3⁰. Каждый угол α любого из треугольников разбиения удовлетворяет оценке

$$\alpha > \alpha_0 = const > 0. \quad (4.8)$$

Тогда при сформулированных условиях для величины

$$K_N(U, \tilde{w}_N) = \sup_{v \in U} \inf_{w \in \tilde{W}^o} \iint_D \left(\left(\frac{\partial(w-v)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (4.9)$$

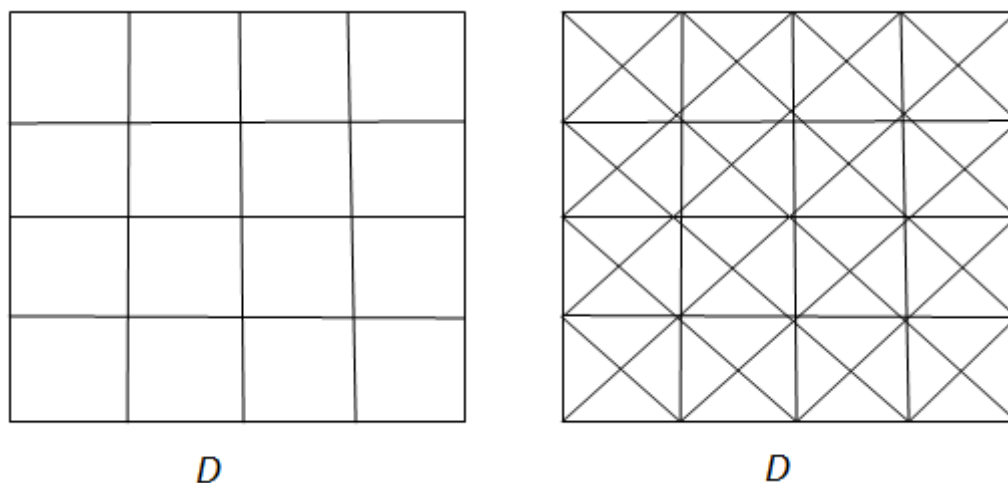
имеет место оценка

$$K_N(U, \tilde{w}_N) \leq C_3 h, \quad (4.10)$$

где C_3 - некоторая постоянная.

Нетрудно увидеть выполнение условий теоремы для разбиения полученного в пунктах 2-4.

Для доказательства теоремы интеграл (4.9) можно разбить на сумму интегралов по многоугольнику D_N , вписанному в область D , и по его дополнению $D \setminus D_N$. Заметим, что для прямоугольной области $D \equiv D_N$.



Р и с у н о к 4.1

Поэтому для прямоугольной области нет существенных различий при вычислении на прямоугольной и треугольной сетках. Рассмотрим случай, когда область D не является прямоугольной, и равенство $D \equiv D_N$ не выполняется. Обратимся к доказательству теоремы 1. В ходе доказательства получена система констант. Для каждого из слагаемых интеграла (4.9) получены оценки

$$\iint_{D_N} \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq A_1, \tag{4.11}$$

$$\iint_{D \setminus D_N} \left(\frac{\partial(w-v)}{\partial y} \right)^2 dx dy \leq A_2, \tag{4.12}$$

где

$$A_1 = \frac{8A_3 h^2}{\sin^2(\alpha_0)}, \tag{4.13}$$

$$A_2 = 2M^2 L^2 C_2 h^2. \tag{4.14}$$

Для случая сетки на основе прямоугольного треугольника и случая прямоугольной сетки $\sin^2(\alpha_0) = 1$. Оценим множитель C_2 . Для случая прямоугольной сетки константа C_2 будет больше константы C_2 для треугольной сетки, так как треугольниками можно покрыть большую площадь области D , чем прямоугольниками. Поэтому число K_N для треугольной сетки меньше, следовательно использование треугольной сетки предпочтительнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С., *Разностные схемы*, Наука, М., 1977.
3. Митчелл Р., Уэйт В., *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными*, Мир, М., 1981.
4. Трemasова Е.П., Бояркин Д.И., “Генераций системы уравнений методом Галеркина для решения задачи об установившихся колебаниях”, *Журнал средневольтского математического общества*, **15**:1. (2013).
5. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина*, Мир, М., 1988.

Building a system of difference equations by the Galerkin method using two-dimensional simplex

© Е. Р. Eremina³, D. I. Boyarkin⁴

Abstract. The Dirichlet problem for the Poisson equation is considered. The system of basic functions for the triangular grid is constructed. The system of equations is generated, the difference scheme is constructed. Estimates for the Kolmogorov widths for triangular and rectangular grids are obtained. Comparative analysis was performed.

Key Words: basis functions, Galerkin form, weak solution, Kolmogorov width.

³ Magister of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; tremasovaep@gmail.ru.

⁴ Docent of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; boyarkindi@gmail.ru.