УДК 517.9

О трёхмерных отображениях с двумерными экспансивными аттракторами и репеллерами

© **В. З. Гринес[1], А. А. Шиловская[2]**

Аннотация. В работе рассмотрен класс диффеоморфизмов на трёхмерных замкнутых многообразиях, неблуждающие множества которых являются объединением двумерных аттракторов и репеллеров. Получена топологическая классификация многообразий, допускающих рассматриваемые диффеоморфизмы. Построен класс модельных отображений, являющихся косым произведением псевдоаносовского гомеоморфизма и грубого преобразования окружности. Доказано, что если ограничение диффеоморфизма из рассматриваемого класса на неблуждающее множество является экспансивнным, то этот диффеоморфизм Ω-сопряжен с некоторой моделью.

Ключевые слова: псевдоаносовский гомеоморфизм, Ω-сопряженность, неблуждающее множество

1. Введение и основные понятия

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизиы гладких замкнутых 3-многообразий, неблуждающее множество которых является объединением двумерных поверхностей, на которых ограничение диффеоморфизма является экспансивным.

Напомним, что гомеоморфизм f компактного метрического пространства (X, d) на себя называется *экспансивным*, если существует число $c > 0$ (*константа экспансивности*) такое, что для любых точек $x, y \in X$ существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

На пространства, допускающие экспансивный гомеоморфизм, существуют ограничения, а именно, в [7] доказано, что если f — экспансивный гомеоморфизм компактного метрического пространства X, то размерность X конечна и каждое минимальное множество является нульмерным. В [5] доказано, что не существует экспансивных гомеоморфизмов на окружности S^1 и двумерной сфере S^2. В то же время в работе [9] доказано, что каждая компактная ориентируемая поверхность положительного рода допускает экспансивный гомеоморфизм. При этом, в силу [5], на поверхности рода 1 экспансивный гомеоморфизм сопряжен с *гиперболическим автоморфизмом тора*[3].

---

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2] Аспирант кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vesnann@mail.ru

[3] *Алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1. То есть $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если

В работах [5] и [3] независимо доказано, что на компактных ориентируемых поверхностях рода $g \geq 2$ экспансивный гомеоморфизм топологически сопряжен *псевдоаносовскому отображению (pA-гомеоморфизму)*, для определения которого (по Нильсену-Терстону [8], [10], см. также [4]) нам понадобятся следующие понятия.

Пусть $\mathcal{S}$ — замкнутое подмножество компактного ориентируемого 2-многообразия M^2 такое, что $M^2 \setminus \mathcal{S}$ является объединением $\bigcup\limits_{j \in J} L_j$ попарно непересекающихся одномерных связных слоев L_j. Будем говорить, что на M^2 задано *слоение* $\mathcal{F} = L_j, j \in J$ *с множеством особенностей* S, если для любой точки $x \in (M^2 \setminus \mathcal{S})$ существует окрестность $U_x \subset M^2$ и диффеоморфизм $\psi : U_x \to \mathbb{R}^2$ такой, что любая компонента связности пересечения $U_x \cap L_j$ (если это пересечение не пусто) отображается ψ в прямую, при этом ограничение ψ на каждую компоненту связности множества $U_x \cap L_j$ является диффеоморфизмом на образ.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $k \neq 2$. Слоением W_k на $\mathbb{R}^2$ со стандартной *седловой особенностью* в точке O и k сепаратрисами называется образ горизонтальных прямых $\{Im\ w = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ при отображении $w = z^{k/2}$ в случае нечетного k и при отображении $w^2 = z^k$ в случае четного k.

Слоение $\mathcal{F}$ на M^2 называется *слоением с седловыми особенностями*, если множество $\mathcal{S}$ особенностей слоения $\mathcal{F}$ состоит из конечного числа точек и для любой точки $s \in \mathcal{S}$ имеется окрестность $U_s \subset M^2$, гомеоморфизм $\psi_s : U_s \to \mathbb{R}^2$ и число $k_s \in \mathbb{N}$ такие, что $\psi_s(s) = O$ и $\psi(\mathcal{F} \cap U) = W_{k_s} \setminus O$. Точка s называется *седловой особенностью с* k_s *сепаратрисами*.

Трансверсальной мерой для слоения $\mathcal{F}$ называется функция, ставящая в соответствие каждой дуге (диффеоморфному образу отрезка $I = [0, 1]$) α, трансверсальной $\mathcal{F}$, неотрицательное число $\mu(\alpha)$ со следующим свойством: если α_0, α_1 — две дуги, трансверсальные к $\mathcal{F}$ и связанные такой гомотопией $a : I \times I \to \mathcal{F}$, что $a(I \times \{0\}) = \alpha_0$, $a(I \times \{1\}) = \alpha_1$ и $a(x \times I)$ для любого $x \in I$ содержится в некотором слое $\mathcal{F}$, то $\mu(\alpha_0) = \mu(\alpha_1)$.

Два слоения $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ называются *трансверсальными*, если они имеют общее множество особенностей $\mathcal{S}$ и во всех остальных точках слои трансверсальны.

Гомеоморфизм $h : M^2 \to M^2$ называется *псевдоаносовским отображением (pA-гомеоморфизмом)*, если на поверхности M^2 существует пара h-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ с множеством седловых особенностей $\mathcal{S}$ и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

1) каждая седловая особенность из $\mathcal{S}$ имеет не менее трех сепаратрис;

собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

2) существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ $(\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha))$ для любой дуги α, трансверсальной $\mathcal{F}^s$ $(\mathcal{F}^u)$.

Слоения $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ называются *устойчивым и неустойчивым* соответсвенно, а число λ – *дилатацией* f.

Следущие определения смотри в [4] и [1].

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *приводимым*, если существует f-инвариантная система непересекающихся между собой простых замкнутых кривых негомотопных нулю и негомотопных друг другу. В противном случае гомеоморфизм называется *неприводимым*.

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *периодическим*, если существует целое $n_0 > 0$ такое, что $f^{n_0} = id$, где id — тождественное преобразование.

Гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ называется *алгебраически конечного типа*, если на M^2 существует конечное инвариантное семейство вложенных в M^2 непересекающихся между собой цилиндров $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ таких, что ограничение гомеоморфизма f на множество $\Delta = M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} int\ \sigma_i$ является периодическим гомеоморфизмом.

Согласно классификации Я.Нильсена [8] и У.Терстена [10] множество всех гомотопических классов $\{f\}$ гомеоморфизмов f на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $g \geq 2$ представляется в виде объединения четырех непересекающихся подмножеств T_1, T_2, T_3, T_4, выделяемых следующими условиями:

1. если $\{f\} \in T_1$, то $\{f\}$ содержит периодический гомеоморфизм;
2. если $\{f\} \in T_2$, то $\{f\}$ содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
3. если $\{f\} \in T_3$, то $\{f\}$ содержит приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
4. если $\{f\} \in T_4$, то $\{f\}$ содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

У. Терстон [10] (см. также [4]) построил модельный псевдоаносовский гомеоморфизм в каждом гомотопическом классе из T_4, обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех таких гомеморфизмов. Заметим, что певдоаносовский гомеморфизм является диффеоморфизмом всюду вне множества особенностей устойчивых и неустойчивых слоений. Поэтому иногда употребляют термин *псевдоаносовский диффеоморфизм*.

2. Структура объемлющего многообразия

В настоящей работе будем рассматривать класс $\mathcal{G}$, состоящий из диффеоморфизмов f, заданных на гладких замкнутых трехмерных многообразиях M^3, неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит из конечного числа компонент связности $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{B}_i$ является ручным вложением в M^3 ориентируемой поверхности M^2 положительного рода;

2) существует натуральное число k_i такое, что $f^{k_i}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i$;

3) $\mathcal{B}_i$ является либо аттрактором, либо репеллером[4] диффеоморфизма f^{k_i}.

Т е о р е м а 2.1. *Если многообразие M^3 допускает диффеоморфизм из класса $\mathcal{G}$, то оно является локально-тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным поверхности M^2.*

В случае, когда поверхность M^2 является тором, результат Теоремы 2.1. следует из работы [2].

3. Модельные диффеоморфизмы

В этом разделе мы сконструируем класс модельных отображений, принадлежащих $\mathcal{G}$, которые являются диффеоморфизмами всюду за исключением конечного множества точек, природа которых будет ясна из конструкции. Вначале предъявим грубые модели преобразований окружности $\mathbb{S}^1$. Согласно результатам А.Г. Майера [6] каждому грубому сохраняющему ориентацию диффеоморфизму φ_+ однозначно соответсвует натуральные параметры $n, k \in \mathbb{N}$ и целое l такое, что для $k = 1$, $l = 0$, тогда как для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ взаимно просто с k; меняющему ориентацию грубому диффеоморфизму φ_- соотвествует натуральный параметр $q \in \mathbb{N}$. Опишем модели, соответствующие этим параметрам.

Представим $\mathbb{S}^1$ как $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (cos2\pi r, sin2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ естественную проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введём следующие отображения:
$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi(r) = -r$;

[4] Инвариантное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма g называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $g(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} g^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма g^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма g.

$\tilde{\varphi}_+ = \chi_{k,l}\psi_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \chi\psi_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}_+(r+\nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$ и $\tilde{\varphi}_-(r+\nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$ для $\nu \in \mathbb{Z}$. Таким образом для $\sigma \in \{+,-\}$ корректно определён диффеоморфизм $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, который при $\sigma = +$ ($\sigma = -$ сохраняет (меняет) ориентацию окружности и неблуждающее множество которого состоит из $2n$ орбит периода k (из $2q$ периодических орбит, две из которых неподвижны, а остальные имеют период два). Обозначим через V_+ (V_-) множество всех отображений φ_+ (φ_-) для всех наборов параметров n,k,l (q). Пусть $P_+ \in \mathcal{P}$ и $J_+ : M^2 \to M^2$ гомеоморфизм такой, что $P_+J_+ = J_+P_+$. Пусть $P_- \in \mathcal{P}$ и $J_- : M^2 \to M^2$ гомеоморфизм такой, что $P_-J_-^{-1} = J_-P_-$. Положим $M_{J_\sigma} = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma_\sigma$, где $\Gamma_\sigma = \{\gamma_\sigma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней гомеоморфизма $\gamma_\sigma : M^2 \times \mathbb{R} \to M^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma_\sigma(z,r) = (J_\sigma(z), r-1)$. Обозначим через $p_{J_\sigma} : M^2 \times \mathbb{R} \to M_{J_\sigma}$ естественную проекцию. Положим $\tilde{\varphi}_\sigma(z,r) = (P_\sigma(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$.

Определение 3.1. *Будем говорить, что гомеоморфизм $\varphi_\sigma : M_{J_\sigma} \to M_{J_\sigma}, \sigma \in \{+,-\}$ является локально прямым произведением $P_\sigma \in \mathcal{P}$ и $\varphi_\sigma \in V_\sigma$, если $\varphi_\sigma = p_{J_\sigma}\tilde{\varphi}_\sigma p_{J_\sigma}^{-1}$, и писать $\varphi_\sigma = P_\sigma \otimes \varphi_\sigma$.*

Обозначим через Φ_+ (Φ_-) множество всех локально прямых произведений φ_+ (φ_-). Положим $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$.

4. Ω-сопряженность с моделью

Обозначим через $\mathcal{G}_*$ подмножество множества $\mathcal{G}$, состоящее из диффеоморфизмов f таких, что ограничение гомеоморфизма f^{k_i} на $\mathcal{B}_i$ является экспансивным гомеоморфизмом.

Теорема 4.1. *Любой диффеоморфизм из класса $\mathcal{G}_*$ является Ω-сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Благодарности. Авторы благодарят О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00672-а и № 13-01-12452 офи_м2.

Список литературы

1. Арансон С. Х., Гринес В. З., “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32.

2. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В., “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.

3. K. Hiraide, “Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov”, *Osaka Journal of Mathematics*, **27**:1 (1990), 117–162.

4. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, пер. с англ. А.Ю. Жирова, ред. Д. В. Аносов, М., 1998, XVI+112 с.

5. J. Lewowicz, “Expansive homeomorphisms of surfaces”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.)*, **20**:1 (1989), 113–133.

6. А.Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч.Зап.ГГУ*, 1939, № 12, 215–229.

7. R. Mane, “Expansive homeomorphisms and topological dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252** (1979), 313–319.

8. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Fl?chen”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358.

9. T. O’Brien, W. Reddy, “Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism”, *Pacific Journal of Mathematics*, **35**:3 (1970), 737–741.

10. W.P. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.

Three-dimensional mapping with two-dimensional expansive attractors and repellers.

© V. Z. Grines[5], A. A. Shilovskaya[6]

Abstract. In this paper, we consider a class of three-dimensional mappings whose non-wandering sets are a union of two-dimensional attractors and repellers. A topological classification of ambient manifolds admitting such systems is obtained. A class of model mappings is constructed where maps are skew products of a pA-homeomorphisms and rough circle transforms. We have proved that a map from the considered class is Ω-conjugated with some model

Key Words: pseudo-Anosov diffeomorphism, Ω-conjugacy, non-wandering set.

[5] Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[6] Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vesnann@mail.ru.