УДК 519.624.8

Итеративные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств

© И. П. Рязанцева[1]

Аннотация. Для смешанных вариационных неравенств в гильбертовом пространстве с монотонным оператором и собственным выпуклым полунепрерывным снизу функционалом при приближенном задании данных построены итеративные методы регуляризации первого порядка по оператору и по функционалу, получены достаточные условия их сходимости к нормальному решению исходной задачи.

Ключевые слова: смешанные вариационные неравенства, итеративный метод, монотонный оператор, выпуклый функционал, сходимость, нормальное решение

1. Основные обозначения и постановка задачи.

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \to R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, элемент $f \in H$, (x, y) – скалярное произведение элементов x и y из H. Рассмотрим в H смешанное вариационное неравенство.

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \le 0, \quad x \in H \quad \forall y \in H \tag{1.1}$$

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений N. Выпуклость и замкнутость N отмечена в [1] (см. также [2], с.254). Далее x^* – нормальное решение (1.1). Нас будут интересовать методы решения задачи (1.1). В предположении монотонности A и выпуклости φ установить корректность задачи (1.1) не удается, поэтому следует строить для нее методы регуляризации. В работе [3] для (1.1) построен операторный метод регуляризации вида

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + \varphi(x_\alpha) - \varphi(y) \le 0, \quad x_\alpha \in H \quad \forall y \in H, \tag{1.2}$$

и метод сглаживающего функционала А.Н.Тихонова

$$(Az_\alpha - f, z_\alpha - y) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|z\|^2 \le 0, \quad z_\alpha \in H \quad \forall y \in H, \tag{1.3}$$

и доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор,*

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

$\varphi : H \to R^1$ *– собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, удовлетворяющий условию*

$$\varphi(x) \geq -c\|x\|^{\kappa}, \quad c > 0, \quad \kappa \in [0, 2), \quad \|x\| \geq R_0 > 0, \tag{1.4}$$

смешанное вариационное неравенство (1.1) имеет непустое множество решений. Тогда регуляризованные задачи (1.2) и (1.3) имеют единственные решения x_α *и* z_α *соответственно, и* $x_\alpha \to x^*$, $z_\alpha \to x^*$ *при* $\alpha \to 0$, *где* x^* *– нормальное решение (1.1).*

Метод (1.2) для смешанного вариационного неравенства (1.1) будем называть методом регуляризации по оператору, а (1.3) – методом регуляризации по функционалу.

Далее считаем, что условия теоремы 1.1. выполнены.

В той же работе [3] получены достаточные условия сильной сходимости следующих непрерывных методов регуляризации первого порядка

$$\begin{aligned}(u'(t), u(t) - y) \;&+\; \gamma(t)[(A(t)u(t)) + \alpha(t)u(t) - f(t), u(t) - y) + \\ &+\; \varphi(t)(u(t)) - \varphi(t)(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad u(t) \in H, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t) - y) \;&+\; \gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t)) - f(t), \tilde{u}(t) - y) + \varphi(t)(\tilde{u}(t)) + \alpha(t)\|\tilde{u}(t)\|^2 - \\ &-\; \varphi(t)(y) - \alpha(t)\|y\|^2] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde{u}(t) \in H, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\tilde{u}(t_0) = u_0 \in H, \tag{1.8}$$

где $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные непрерывные функции, $A(t), \varphi(t)$ и $f(t)$ – приближения A, φ и f соответственно, $t \geq t_0 \geq 0$.

Цель данной работы состоит в построении неявных дискретных вариантов методов (1.5), (1.6) и (1.7), (1.8) и исследование их сходимости.

2. Итеративные методы регуляризации первого порядка

Пусть приближения A, f и φ определяются последовательностями $\{A^n\}$, $\{f^n\}$ и $\{\varphi^n\}$, причем при любом натуральном n выполнены следующие условия:

a) $A^n : H \to H$ – монотонные хеминепрерывные операторы,

$$\|A^n x - Ax\| \leq h_n g(\|x\|) \quad \forall x \in H;$$

b) $f^n \in H,\ \|f^n - f\| \leq \delta_n$;
c) $\varphi^n : H \to R^1$ – собственные выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, $|\varphi^n(x) - \varphi(x)| \leq \sigma_n q(\|x\|) \quad \forall x \in H$,
где функции $g(s)$ и $q(s)$ ограничены на ограниченных множествах, $\{h_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\sigma_n\}$ – бесконечно малые последовательности неотрицательных чисел.

На базе (1.5), (1.6) построим итерационный процесс следующего вида

$$\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau_n}, u_n - y\right) + \gamma_n[(A^n u_n + \alpha_n u_n - f^n, u_n - y) + \varphi^n(u_n) - \\ - \varphi^n(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad u_n \in H, \tag{2.1}$$

где элемент u_0 из H задается произвольно, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\tau_n\}$ – последовательности положительных чисел, причем $\{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность, и

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{2.2}$$

$\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – ограниченные последовательности.

Прежде всего отметим, что согласно теореме 1.1., последовательность $\{x^m\}$ решений регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$(Ax^m + \alpha_m x^m - f, x^m - y) + \varphi(x^m) - \varphi(y) \leq 0, \quad x^m \in H \quad \forall y \in H \tag{2.3}$$

сходится к нормальному решению (1.1).

В силу наших предположений a) – c) и (1.4) для $x \in H$ установим справедливость неравенства

$$(x + \tilde{\gamma}_n(A^n x + \alpha_n x - f^n) - u_{n-1}, x - x_0) + \tilde{\gamma}_n \varphi^n(x) \geq \\ \geq \|x\|[(1 + \tilde{\gamma}_n \alpha_n)(\|x\| - \|x_0\|) - \varphi_n] - \tilde{\gamma}_n[\sigma_n q(\|x\|) + c\|x\|^\kappa] - \varphi_n\|x_0\|, \tag{2.4}$$

здесь $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n \tau_n$, $\varphi_n = \tilde{\gamma}_n(h_n g(\|x_0\|) + \delta_n + \|Ax_0\| + \|f\|) + \|u_{n-1}\|$, $\|x\| \geq R_0$. Пусть имеет место неравество

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{q(t)}{t^2} \leq Q, \quad 0 \leq Q < \infty, \tag{2.5}$$

тогда из (2.4) делаем вывод об однозначной разрешимости смешанного вариационного неравенства (2.1) (см.[4], с.265, [5], с.186, 187), если $1 + \tilde{\gamma}_n \alpha_n > \tilde{\gamma}_n \sigma_n Q$. Последнего можно всегда добиться (по крайней мере при достаточно больших n), поскольку последовательность $\{\tilde{\gamma}_n\}$ ограничена, а $\{\sigma_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малые.

При каждом натуральном $m \geq 1$ построим вспомогательное смешанное вариационное неравенство

$$\left(\frac{v_n^m - v_{n-1}^m}{\tau_n}, v_n^m - y\right) + \gamma_n[(Av_n^m + \alpha_m v_n^m - f, v_n^m - y) + \varphi(v_n^m) - \\ - \varphi(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad v_n^m \in H, \tag{2.6}$$

$$v_0^m = u_0. \tag{2.7}$$

Подобно (2.4) установим неравенство

$$\begin{aligned}(x &+ \tilde{\gamma}_n(Ax+\alpha_m x - f) - v_{n-1}^m, x - x_0) + \tilde{\gamma}_n\varphi(x) \geq \\ &\geq \|x\|[(1+\tilde{\gamma}_n\alpha_m)(\|x\| - \|x_0\|) - \varphi_n^m] - \varphi_n^m\|x_0\| - \tilde{\gamma}_n c\|x\|^\kappa, \end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь $\varphi_n^m = \tilde{\gamma}_n(\|Ax_0\| + \|f\|) + \|v_{n-1}^m\|,\ x_0 \in H,\ \ \|x\| \geq R_0.$

Таким образом, установлена однозначная разрешимость вспомогательного смешанного вариационного неравенства (2.6) для любой пары натуральных чисел n и m. Пусть в (2.3), умноженном на $\tilde{\gamma}_n$, элемент $y = v_n^m$, а в (2.6) – $y = x^m$. Сложив полученные неравенства, после простых преобразований имеем

$$\|v_n^m - x^m\| \leq (1 - a_n^m)\|v_{n-1}^m - x^m\|, \quad a_n^m = \frac{\tilde{\gamma}_n\alpha_m}{1+\tilde{\gamma}_n\alpha_m}. \tag{2.9}$$

Следовательно(см. [6] – [8] и (2.7)),

$$\|v_n^m - x^m\| \leq \exp(-\alpha_m\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\tau_k)\|u_0 - x^m\|,$$

откуда при $n = m$ получаем неравенство

$$\|v_m^m - x^m\| \leq \exp(-\alpha_m\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\tau_k)\|u_0 - x^m\|. \tag{2.10}$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\gamma_n\tau_n = +\infty, \tag{2.11}$$

тогда в силу (2.2) тем более $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\tau_n = +\infty,$ и по теореме Штольца установим соотношение

$$\alpha_m\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\tau_k \sim \frac{\alpha_m\alpha_{m-1}\gamma_m\tau_m}{\alpha_{m-1}-\alpha_m} \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n-1}-\alpha_n}{\alpha_n\alpha_{n-1}\gamma_n\tau_n} = 0. \tag{2.12}$$

Теперь из (2.10) имеем сходимость последовательности $\{v_m^m - x^m\}$ к нулю. Заметим, что из (2.10) следует ограниченность в совокупности семейства последовательностей $\{v_n^m\}$, а ограниченность $\{u_n\}$ предположим.

Положив в (2.1) $y = v_n^m$, а в (2.6) – $y = u_n$ и сложив результаты, придем к неравенству

$$\|u_n - v_n^m\|^2 + (v_{n-1}^m - u_{n-1}, u_n - v_n^m) + \tilde{\gamma}_n[(A^n u_n - Av_n^m, u_n - v_n^m)+$$
$$+\alpha_n\|u_n - v_n^m\|^2 + (\alpha_m - \alpha_n)(v_n^m, v_n^m - u_n) + (f^n - f, v_n^m - u_n)+$$
$$+\varphi^n(u_n) - \varphi(u_n) + \varphi(v_n^m) - \varphi^n(v_n^m)] \leq 0,$$

откуда, используя условия a) – c), ограниченность $\{u_n\}$, ограниченность в совокупности последовательностей $\{v_n^m\}$ и числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, подобно (3.13) из [3] получим

$$\|u_n - v_n^m\|^2(1 + 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n) \leq \|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + 2\tilde{\gamma}_n\Big\{\big[h_n g(\|v_n^m\|) + |\alpha_n - \alpha_m|\|v_n^m\|+$$
$$+\delta_n\big](\|u_n\| + \|v_n^m\|) + \tilde{\gamma}_n\sigma_n(q(\|u_n\|) + q(\|v_n^m\|))\Big\} \leq \|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2+$$
$$+a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + |\alpha_m - \alpha_n|), \quad a_1 > 0,$$

или

$$\|u_n - v_n^m\|^2 \leq (1 - b^n)\|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + |\alpha_m - \alpha_n|), \tag{2.13}$$

здесь $b^n = 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n/(1 + 2\alpha_n\tilde{\gamma}_n)$.
Поскольку последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ ограничены, а $\{\alpha_n\}$ убывает, то $\alpha_n \leq \alpha_1$, $\gamma_n \leq \bar{\gamma}$, $\tau_n \leq \bar{\tau}$ при всех натуральных n, здесь $\bar{\gamma} > 0$, $\bar{\tau} > 0$. Значит, для величины b^n имеет место оценка снизу следующего вида

$$b^n \geq \frac{2\alpha_n\tilde{\gamma}_n}{1 + 2\alpha_1\bar{\gamma}\bar{\tau}} = \lambda\alpha_n\tilde{\gamma}_n, \quad \lambda = \frac{2}{1 + 2\alpha_1\bar{\gamma}\bar{\tau}},$$

поэтому от (2.13) при $n \leq m$ приходим к неравенству

$$\|u_n - v_n^m\|^2 \leq (1 - \lambda\alpha_n\tilde{\gamma}_n)\|u_{n-1} - v_{n-1}^m\|^2 + a_1\tilde{\gamma}_n(\delta_n + h_n + \sigma_n + (\alpha_n - \alpha_m)).$$

Учитывая равенство (2.7), отсюда выводим оценку (см. [6] – [8])

$$\|u_m - v_m^m\|^2 \leq a_1\Big[\sum_{k=1}^{m}\tilde{\gamma}_k(\delta_k + h_k + \sigma_k)\exp\left(\lambda\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\tilde{\gamma}_i\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - \alpha_m)\exp\left(\lambda\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\tilde{\gamma}_i\right)\Big]. \tag{2.14}$$

С помощью теоремы Штольца убеждаемся, что сходимость к нулю первой суммы в правой части (2.14) обеспечивает следующее предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n + h_n + \sigma_n}{\alpha_n} = 0. \tag{2.15}$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}{b_n b_{n-1}+b_n-b_{n-1}} = 0, \quad b_n = \gamma_n \alpha_n \tau_n. \tag{2.16}$$

Теперь, применив дважды теорему Штольца и учитывая наши предположения (2.11) и (2.16), установим сходимость к нулю второй суммы в (2.14). Тем самым доказано, что $\|u_m - v_m^m\| \to 0$ при $m \to \infty$. Значит, имеем сходимость последовательности $\{u_n\}$ к x^*.

Исследуем сходимость дискретного варианта непрерывного метода регуляризации (1.7) в следующей форме

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde u_n - \tilde u_{n-1}}{\tau_n}, \tilde u_n - y\right) \; &+ \; \gamma_n[(A^n \tilde u_n - f^n, \tilde u_n - y) + \varphi^n(\tilde u_n) + \alpha_n\|\tilde u_n\|^2 - \\ &- \; \varphi^n(y) - \alpha_n\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde u_n \in H. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Вспомогательная последовательность определяется из смешанного вариационного неравенства

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde v_n^m - \tilde v_{n-1}^m}{\tau_n}, \tilde v_n^m - y\right) \; &+ \; \gamma_n[(A\tilde v_n^m - f, \tilde v_n^m - y) + \varphi(\tilde v_n^m) + \alpha_m\|\tilde v_n^m\|^2 - \\ &- \; \varphi(y) - \alpha_m\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde v_n^m \in H, \end{aligned} \tag{2.18}$$

причем $\tilde v_0^m = \tilde u_0$ при всех $m \ge 1$. Для величин

$$(x + \tilde\gamma_n(A^n x - f^n) - \tilde u_{n-1}, x - x_0) + \tilde\gamma_n[\varphi^n(x) + \alpha_n\|x\|^2],$$

$$(x + \tilde\gamma_n(Ax - f) - \tilde v_{n-1}^m, x - x_0) + \tilde\gamma_n[\varphi(x) + \alpha_m\|x\|^2]$$

без труда устанавливаются оценки снизу типа (2.4) и (2.8), обеспечивающие разрешимость смешанных вариационных неравенств (2.17) и (2.18) относительно $\tilde u_n$ и $\tilde v_n^m$ соответственно. Единственность этих решений гарантирует сильная выпуклость функционала $\|x\|^2$ на H (см. [3]). Пусть z^m – единственное решение регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$(Az^m - f, z^m - y) + \varphi(z^m) + \alpha_m\|z^m\|^2 - \varphi(y) - \alpha_m\|y\|^2 \le 0, \quad z^m \in H \quad \forall y \in H. \tag{2.19}$$

Полагая в (2.18) $y = \xi\tilde v_n^m + (1-\xi)z^m$, $\xi \in (0,1)$ и учитывая монотонность A и (2.19), выводим оценку (см. (2.9))

$$\|\tilde v_n^m - z^m\| \le (1 - a_n^m)\|\tilde v_{n-1}^m - z^m\|, \tag{2.20}$$

и предположив ограниченность $\{\tilde u_n\}$, из (2.17) и (2.18) подобно (2.20) установим оценку вида (2.14) для $\|\tilde u_m - \tilde v_m^m\|$. Тем самым установлено утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть в условиях теоремы 1.1. возмущенные данные* $\{A^n\}$, $\{f^n\}$ *и* $\{\varphi^n\}$ *задачи (1.1) удовлетворяют условиям a) – c),* $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ *– последовательности положительных чисел, причем* $\{\alpha_n\}$ *убывает, а* $\{\gamma_n\}$ *и* $\{\tau_n\}$ *ограничены, и выполнены условия (2.2), (2.5), (2.11), (2.12), (2.15), (2.16). Тогда смешанные вариационные неравенства (2.1), (2.6), (2.17), (2.18) однозначно разрешимы, и если последовательности* $\{u_n\}$, $\{\tilde{u}_n\}$ *ограничены, то они сходятся по норме пространства* H *к нормальному решению (1.1).*

З а м е ч а н и е 2.1. *Пусть существуют число* $R > 0$ *и элемент* $x_0 \in H$ *такие, что*

$$(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0) > 0 \quad \textit{при} \quad \|x\| \geq R. \tag{2.21}$$

Отметим, что (2.21) есть одно из достаточных условий разрешимости смешанного вариационного неравенства (1.1) (см. [5]*, с.187). Предположим также, что верно (2.5) и*

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t} \leq G, \quad 0 \leq G < \infty. \tag{2.22}$$

В условиях (2.5), (2.21), (2.22) докажем ограниченность последовательности u_n*. Пусть* $\|u_n\| \to \infty$ *при* $n \to +\infty$*. Положив в (2.1)* $y = x_0$ *и используя условия a) – c), имеем*

$$\left(\frac{u_n - x_0 - (u_{n-1} - x_0)}{\tau_n}, u_n - x_0\right) + \gamma_n[(Au_n - f, u_n - x_0) + \varphi(u_n) - \varphi(x_0)] +$$
$$+\gamma_n\alpha_n\Bigg\{\|u_n\|^2 - \|u_n\|\,\|x_0\| - \left(\frac{h_n}{\alpha_n}g(\|u_n\|) + \frac{\delta_n}{\alpha_n}\right)(\|u_n\| + \|x_0\|) -$$
$$-\frac{\sigma_n}{\alpha_n}[q(\|u_n\|) + q(\|x_0\|)]\Bigg\} \leq 0.$$

В силу (2.5), (2.21), (2.22) и (2.15) из последнего неравенства при достаточно больших n *выводим оценку* $\|u_n - x_0\|) \leq \|u_{n-1} - x_0\|$*. Значит, последовательность* $\rho_n = \|u_n - x_0\|$ *не возрастает при достаточно больших* n*, что противоречит предположению о неограниченности* $\|u_n\|$*. Аналогичное утверждение имеет место и для решения задачи (1.7), (1.8).*

Замечания, подобные замечаниям 3.1 – 3.4 из [3], можно сформулировать и в условиях данной работы.

Список литературы

1. Лисковец О.А., “Регуляризация смешанных вариационных неравенств”, *ДАН СССР*, **317**:2 (1991), 300–304.
2. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.
3. Рязанцева И.П., “Непрерывные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:1 (2012), 36–44..
4. Лионс Ж.–Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
5. Kluge R., *Nichtlinear Variationsungleihungen und Exrtemalaufgaben*, Dtsch. Verl. Wiss., Berlin, 1974.
6. Апарцин А.С., “К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве”, *Труды по прикладной математике и кибернетике*, 1972, 7 – 14.
7. Васин В.В., Агеев А.Л., *Некорректные задачи с априорной информацией.*, Уральская издательская фирма «Наука», Екатеринбург, 1993.
8. Рязанцева И.П., “Методы итеративной регуляризации второго порядка для выпуклых задач условной минимизации”, *Известия вузов. Математика.*, 2000, № 12, 67–77.

First-order regularized iterative methods for mixed variational inequalities

© I. P. Ryazantseva[2]

Abstract. First-order regularized iterative methods by operator and by functional are constructed for mixed variational inequalities in Hilbert space with monotone operator and property convex functional. Sufficient conditions of convergence to normal solution of initial problem are obtained.
Key Words: mixed variational inequality, iterative method, monotone operator, convex functional, convergence, normal solution.

[2] Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru