

УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности

© В. В. Лукашев¹, В. Н. Попов²

Аннотация. Построено аналитическое решение БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. В качестве граничного условия на стенке использована модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений коэффициента диффузности вычислена скорость теплового скольжения вдоль поверхности, получены распределения массовой скорости газа и вектора потока тепла в слое Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными результатами, имеющимися в открытой печати

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий

1. Введение

Поведение разреженных газов существенно отличается от поведения плотных газов. Так, если в разреженный газ поместить неравномерно нагретое тело, то газ придет в движение от менее нагретых частей тела к более нагретым [1]. Это явление получило название теплового скольжения или теплового крипа, а установившаяся скорость движения газа – скоростью теплового скольжения [1]. Теоретический анализ теплового скольжения с использованием кинетической теории впервые был дан Максвеллом [2]. Однако при решении этой задачи Максвелл опирался на предположение о том, что молекулы газа перед ударом о стенку имеют то же самое распределение по скоростям, что и в объеме газа. В действительности же функция распределения молекул газа в слое Кнудсена существенно отличается той, что имеет место в объеме газа вдали от стенки при наличии градиента температуры. Как отмечено в [1], строгое описание теплового скольжения должно быть основано на решении в слое Кнудсена (тонком пристеночном слое, толщина которого примерно равна средней длине свободного пробега молекул газа) кинетического уравнения Больцмана или, в силу его сложности, модельного кинетического уравнения. В данной постановке с использованием приближенных методов данная задача впервые решена в [1]. В рамках модельного уравнения были вычислены скорость теплового скольжения газа

¹ Ассистент кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

и скорость газа непосредственно вблизи стенки, а также построен профиль массовой скорости газа в слое Кнудсена. При этом в качестве граничного условия была использована модель диффузного отражения молекул газа обтекаемой поверхностью. Дальнейшие исследования теплового скольжения с учетом поведения макропараметров газа в слое Кнудсена были предприняты в работах [3]–[5]. В [3] и [5] в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовалась БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения, а в [4] – линеаризованное уравнение Больцмана. В [4] и [5] для решения задачи использован метод дискретных ординат, а в качестве граничного условия – модель зеркально-диффузного отражения Максвелла. В [3] задача решалась с использованием метода Кейза при диффузном отражении молекул газа поверхностью и метода аппроксимационных функций с учетом диффузно-зеркального граничного условия. Основное достоинство метода Кейза по сравнению с другими методами заключается в том, что он позволяет получить в явном виде функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям, зная которую, можно сравнительно легко вычислить все макропараметры газа [3]. В представленной работе решение, полученное в [3] с использованием метода Кейза обобщается на случай зеркально-диффузного граничного условия Максвелла. Данная модель граничного условия более реалистична для технических (специальным образом не обработанных) поверхностей. Однако ее использование существенно усложняет решение задачи: коэффициенты в разложении решения задачи по собственным векторам дискретного спектра характеристического уравнения, соответствующего исходному интегро-дифференциальному уравнению, в этом случае зависят от коэффициентов в разложении по собственным векторам непрерывного спектра, а нахождение последних приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В итоге как сама функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, так и макропараметры газа записываются в виде рядов Неймана. Для решения задачи в работе используется математический аппарат, разработанный в [6] при моделировании течений разреженного газа в плоских каналах. Полученные в работе результаты сравниваются с аналогичными результатами, полученными в [5] и [4].

2. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим газ, заполняющий полупространство $x' > 0$, ограниченное стенкой, расположенной в плоскости $x' = 0$. Предположим, вдоль стенки

поддерживается постоянный градиент температуры. Если ось Oz' направить вдоль градиента температуры, то в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана записывается в виде [3]

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.1)$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально равновесная функция распределения, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа. Будем полагать, что состояния газа мало отличается от равновесного. Тогда задача допускает линейризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) [1 + C_z Z(x, C_x) + C_z (C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x)], \quad (2.2)$$

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C) [1 + 2C_z U_0 + G_T (z - C_z) (C^2 - \frac{5}{2})].$$

Здесь $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа вдали от стенки; $f(C) = n_0 (\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан; $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T_0$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T_0 – температура газа в начале координат; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа; U_0 – искомая скорость скольжения газа; $G_T = (1/T_0)(dT/dz)$ – безразмерный градиент температуры. Учитывая, что состояние газа мало отличается от равновесного, функцию $f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ линейризуем относительно абсолютного максвеллиана, т.е. запишем ее в виде

$$f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C) [1 + 2C_z U_z(x) + G_T z (C^2 - \frac{5}{2})], \quad (2.3)$$

где с учетом (2.2)

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left[1 + 2C_z U_0 + G_T (z - C_z) (C^2 - \frac{5}{2}) + C_z Z(x, C_x) + C_z (C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x) \right] =$$

$$= U_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-C_x^2) Z(x, C_x) dC_x, \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), приходим к системе незацепленных уравнений для нахождения функций $Z(x, \mu)$ и $Z_1(x, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) (1 - \mu\tau) Z(x, \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial x} + Z_1(x, \mu) = 0. \quad (2.6)$$

При записи системы уравнений (2.5), (2.6) ввели обозначение $\mu = C_x$ и учли ортогональность в смысле скалярного произведения с весом $\exp(-C_y^2 - C_z^2)$ функций C_z и $C_z(C_y^2 + C_z^2 - 2)$. С учетом (2.2) граничные условия для $Z(x, \mu)$ и $Z_1(x, \mu)$ вдали от стенки записываются в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Z(x, \mu) = \lim_{x \rightarrow +\infty} Z_1(x, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (2.7)$$

Граничное условие на стенке имеет вид

$$f^+(\mathbf{r}', \mathbf{v})|_s = (1 - q)f^-(\mathbf{r}', \mathbf{v})|_s + qf_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}), \quad (2.8)$$

$$f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C) \left[1 + G_T z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right].$$

Здесь $f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – функция распределения с параметрами, заданными на стенке, q – коэффициент аккомодации стенкой тангенциального импульса молекул газа (коэффициент диффузности). Подставляя (2.2) и (2.8) в (2.7), находим

$$Z(0, \mu) = (1 - q)Z(0, -\mu) - 2qU_0 + qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right), \quad \mu > 0, \quad (2.9)$$

$$Z_1(0, \mu) = (1 - q)Z_1(0, -\mu) + qG_T, \quad \mu > 0. \quad (2.10)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению системы уравнений (2.5), (2.6) с граничными условиями (2.7), (2.9), (2.10).

3. Построение функции распределения молекул газа

Решение уравнения (2.6) с граничными условиями (2.7), (2.10) имеет вид

$$Z_1(x, \mu) = qG_T \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) H_+(\mu), \quad (3.1)$$

где $H_+(\mu)$ – ступенчатая функция Хэвисайда ($H_+(\mu) = 1$, если $\mu > 0$, и $H_+(\mu) = 0$, если $\mu < 0$)

Общее решение (2.5) имеет вид [3]

$$Z(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (3.2)$$

Здесь

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mu^2) d\mu}{\mu - z}, \quad (3.3)$$

$P(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, а A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению. С учетом граничного условия (2.7) находим $A_0 = 0$, $A_1 = 0$. Подставляя далее (3.2) в граничное условие (2.9), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) a(\mu) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad (3.4)$$

$$f(\mu) = -2qU_0 + qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \quad (3.5)$$

Решение (3.4) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - z}, \quad (3.6)$$

для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой, выполняются соотношения

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu a(\mu), \quad 0 < \mu < +\infty, \quad (3.7)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta - \mu}, \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (3.8)$$

Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (3.3), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (3.9)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (3.10)$$

С учетом (3.5) и (3.7) – (3.10) сведем сингулярное интегральное уравнение (3.4) к краевой задаче Римана

$$\begin{aligned} & \left[N^+(\mu) + 2qU_0 - qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \lambda^+(\mu) - \\ & - \left[N^-(\mu) + 2qU_0 - qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \lambda^-(\mu) = \\ & = 2i(1-q)\mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Особенность краевой задачи (3.11) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в нуль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}$$

и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости.

Решение этой задачи имеет вид [3]:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\theta(\tau) - \pi) d\tau}{\tau - z} \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} \left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)} \right).$$

С учетом решения задачи факторизации перепишем (3.11)

$$\begin{aligned} & \left[N^+(\mu) + 2qU_0 - qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \right] X^+(\mu) - \\ & - \left[N^-(\mu) + 2qU_0 - qG_T \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) \right] X^-(\mu) = \\ & = \frac{2i(1-q)X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (3.12) функций, ее общее решение по формулам Сохоцкого имеет

вид

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z} \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} - 2qU_0 + qG_T \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{P_n(z)}{X(z)}, \quad (3.13)$$

где $P_n(z)$ – многочлен коэффициенты и степень которого найдем из условия разрешимости задачи.

В окрестности бесконечно удаленной точки выражение (3.13) будет иметь вид:

$$N(z) = -\frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} + O\left(\frac{1}{z}\right) - 2qU_0 + qG_T \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) + P_n(z) \left(z + Q_1 + \frac{Q_2 + Q_1^2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right), \quad (3.14)$$

где Q_n – интегралы Лоялки, в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$.

Так как функция $N(z)$ согласно (3.6) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки должно выполняться соотношение $N(z) = O(1/z)$. Отсюда, с учетом (3.14) необходимо положить $P_n(z) = C_0 + C_1 z$. Тогда, приравнявая в (3.14) коэффициенты при одинаковых степенях z , находим

$$C_0 = qG_T Q_1, \quad C_1 = -qG_T, \\ U_0 = -\frac{1}{2q} \left[qG_T \left(Q_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \eta X(-\eta) a(\eta) d\eta \right]. \quad (3.15)$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (3.2) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (3.7), предварительно преобразовав (3.13).

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \\ = \frac{\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \left[qG_T(\mu - Q_1) + \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta) a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right]. \quad (3.16)$$

Отсюда с учетом (3.7) для нахождения $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = h(\mu) \left[qG_T(\mu - Q_1) + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\eta X(-\eta)a(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right], \quad \mu > 0. \quad (3.17)$$

Здесь

$$h(\mu) = \frac{\exp(-\mu^2)X(-\mu)}{2|\lambda^+(\mu)|^2}, \quad \lambda = \frac{1 - q}{\sqrt{\pi}}.$$

Решение (3.17) ищем в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к системе рекуррентных соотношений, из которых находим

$$a_0(\mu) = qG_T(\mu - Q_1)h(\mu), \quad a_1(\mu) = qG_T h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1)g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu},$$

$$a_k(\mu) = qG_T h(\mu) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1)g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$g(\eta) = \eta X(-\eta)h(\eta).$$

Подставляя (3.18) в (3.15) с учетом полученных результатов, можем записать

$$U_0 = -\frac{G_T}{2} \left[Q_2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} I_k \right], \quad (3.19)$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} (\eta - Q_1)g(\eta) d\eta, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1)g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta},$$

$$I_k = \int_0^{+\infty} g(\eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1)g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}.$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0 , A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (3.2) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

4. Вычисление макропараметров газа

Подставляя полученные результаты в (2.4), находим скорость газа над стенкой

$$\begin{aligned}
 U_z(x) &= U_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z(x, \mu) d\mu = \\
 &= -\frac{G_T}{2} \left[Q_2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} I_k - q \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k J_k(x) \right]. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &= \int_0^{+\infty} (\eta - Q_1) \gamma(x, \eta) d\eta, \quad J_1(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_1 - Q_1) g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta}, \\
 J_k(x) &= \int_0^{+\infty} \gamma(x, \eta) d\eta \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int_0^{+\infty} \frac{(\eta_k - Q_1) g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}, \\
 \gamma(x, \eta) &= \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) h(\eta).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, исходя из статистического смысла функции распределения, находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла

$$\begin{aligned}
 q_z(x) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \left[1 + 2C_z U_0 + G_T (z - C_z) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + C_z Z(x, C_x) + C_z (C_y^2 + C_z^2 - 2) Z_1(x, C_x) \right] = \\
 &= G_T \left[-\frac{5}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) \left(\mu^2 - \frac{1}{2} \right) Z(x, \mu) d\mu + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) Z_1(x, \mu) d\mu \right].
 \end{aligned}$$

Подставляя теперь явный вид функций $Z(x, \mu)$ и $Z_1(x, \mu)$, находим

$$q_z(x) = G_T \left[-\frac{5}{4} + \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\mu^2 - \frac{x}{\mu}\right) d\mu - \frac{q}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k J_k(x) \right]. \quad (4.2)$$

5. Анализ результатов

Значения $U_z(x)/G_T$ и $-q_z(x)/G_T$, вычисленные согласно (4.1) и (4.2) и полученные в [4] с использованием метода дискретных ординат на основе линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер, представлены в Таблицах 1 и 2.

x	$q = 0.1^*$	$q = 0.1^{**}$	$q = 0.5^*$	$q = 0.5^{**}$	$q = 1.0^*$	$q = 1.0^{**}$
0.0	0.23425	0.23877	0.17518	0.17337	0.10928	0.10469
0.5	0.25011	0.25648	0.25027	0.25474	0.2499	0.25196
1.0	0.25543	0.26131	0.27604	0.27774	0.29956	0.29544
2.0	0.26013	0.26456	0.29901	0.29333	0.34421	0.32517

Таблица 1. Значения $U_z(x)/G_T$: * – (4.1), ** – [4].

x	$q = 0.1^*$	$q = 0.1^{**}$	$q = 0.5^*$	$q = 0.5^{**}$	$q = 1.0^*$	$q = 1.0^{**}$
0.0	1.18505	1.1662	0.92814	0.8584	0.61306	0.5271
0.5	1.22611	1.2254	1.13142	1.1322	1.01484	1.0264
1.0	1.23716	1.2389	1.18625	1.1969	1.12354	1.1487
2.0	1.24516	1.2472	1.22599	1.1969	1.20238	1.2242

Таблица 2. Значения $-q_z(x)/G_T$: * – (4.2), ** – [4].

Как видно из приведенных таблиц полученные в работе результаты хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными в [4]. Имеющее место различие объясняется тем, что операторы столкновений модельных уравнений не совсем корректно описывают спектр собственных значений оператора столкновений Больцмана, что неоднократно отмечалось в [1] – [3] [5]. Вместе с тем в рамках одной и той же модели отличие менее существенное. Так, значение $U_z(x)/G_T = 0.10928$, полученное в представленной работе при $q = 1$, отличается менее чем на 0.001% от 0.109278, полученного в [3].

Профили массовой скорости газа $U_z(x)$ и z -компоненты вектора потока тепла q_z , отнесенные к градиенту массовой скорости, для различных значений коэффициента аккомодации, рассчитанные согласно (4.1) и (4.2) приведены на Рисунке 1.

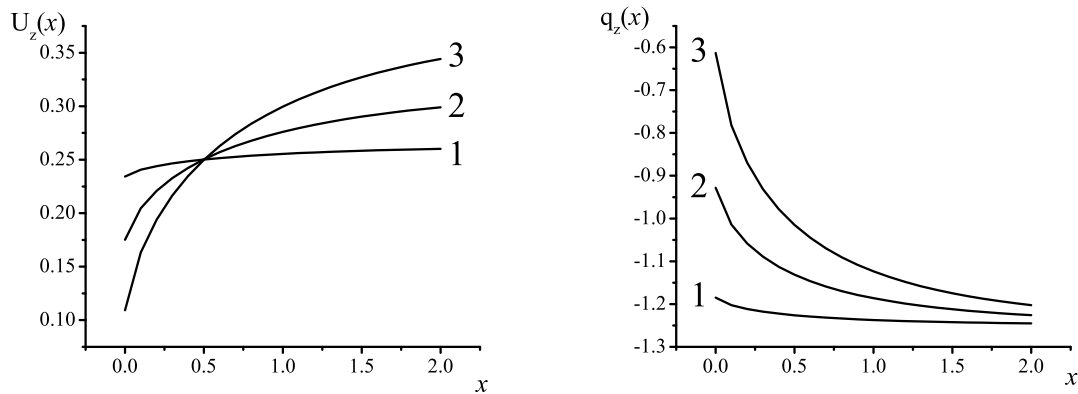


Рис. 1. Графики зависимости $U_z(x)/G_v$ и $q_z(x)/G_v$: 1) $q = 0.1$, 2) $q = 0.5$, 3) $q = 1.0$

Значения скорости скольжения U_0 , рассчитанные согласно (3.19), приведены в Таблице 3. Там же приведены значения, полученные в [3] – [5] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер (LBE), модели кинетического уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) и БГК модели (BGK).

q	(3.19)	BGK [3]	BGK [5]	CES [4]	LBE [4]
0.1	0.26418	0.263956	0.2641783	0.2671726	0.265765
0.2	0.27815	0.277741	0.2781510	0.2770231	0.274450
0.3	0.29192	0.291357	0.2919238	0.2864184	0.2864184
0.4	0.30550	0.304807	0.3055019	0.2953902	0.291124
0.5	0.31889	0.318096	0.3188906	0.3039673	0.299133
0.6	0.33209	0.331227	0.3320949	0.3121761	0.306938
0.7	0.34512	0.344202	0.3451195	0.3200405	0.314547
0.8	0.35797	0.357024	0.3579692	0.3275826	0.321968
0.9	0.37065	0.369697	0.3706483	0.3348226	0.329210
1.0	0.38316	0.382223	0.3831612	0.3417790	0.336280

Таблица 3. Значения U_0/G_v при различных значениях q .

Как видно из приведенной таблицы, отличие значений скорости изотермического скольжения, полученных в представленной работе, не превышает 0.001% от аналогичных значений, найденных в [5] и 0.2% от значений в [3], полученных в рамках БГК модели. Отличие от аналогичных результатов, полученных в рамках CES и LBE моделей, составляет от 10% при $q = 1$ до 1% при $q = 0.1$, и обусловлено зависимостью значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений.

6. Заключение

Итак, в работе с использованием аналитических методов построено решение задачи об тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. Для произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа получены аналитические выражения, описывающие в слое Кнудсена распределения скорости газа и вектора потока тепла. Проведен численный анализ полученных выражений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Maxwell J. On stress in rarefied gases arising from inequalities of temperature Philos. Trans. R. Soc. 1879. V 170. № 1. P. 170-231.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение граничных задач для кинетических уравнений: монография. М.: МГОУ. 2004. 286 с.
4. Siewert C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273–303.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equation in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients // Physics Fluids. 2002. V. 14. No 12. P. 4123–2129.
6. Попов В., Юшканов А. Лукашев В. Математическое моделирование процессов переноса в каналах: монография. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co. KG. 2014. 116 с.

Analytic solution of the problem of heat slip of a rarefied gas along a hard flat surface

© V. V. Lukashev³, V. N. Popov⁴

Abstract. The analytic solution of the BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) models of the Boltzmann kinetic equation in the problem on thermal heat slip of a rarefied gas along a hard flat surface is constructed. As boundary conditions on a wall the mirror-diffuse reflection model is used. For different values of the coefficient of diffusely the speed of thermal slip along the surface and distribution of the gas velocity and the vector of heat flow in the Knudsen layer are obtained. The comparison with similar results, published in the open press is done.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

³ Assistant of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.

⁴ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.