УДК 517.9

Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2], Д. В. Хитева [3]

Аннотация. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью и коэффициентом перед квадратом первой производной, который может обращаться в нуль. С применением метода дополнительного аргумента определены условия его локальной разрешимости.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, локальная разрешимость, метод дополнительного аргумента, лиминальность

В диссипативной механике материалов, определяемой взаимодействием дислокаций и точечных дефектов, свойства пластической деформации определяются с помощью скалярной плотности дислокаций [1]. Указанное взаимодействие приводит к переползанию краевых и скручиванию винтовых дислокаций, что во внешних силовых полях вызывает разрушение. При циклическом деформировании; при облучении, закалке; при температуре, составляющей более половины от температуры плавления; вблизи поверхности; при поверхностных химических реакциях и т.д. это взаимодействие проявляется как основное [2].

В полупроводниковых кристаллах аналогичное взаимодействие, кроме механических,вызывает различные электронные эффекты, на основе которых действуют твердотельные приборы в микро и наномасштабах (дислокационная инженерия). С другой стороны в металлах и полупроводниках с большой энергией дефектов упаковки не наблюдались наибольшие упрочнения и зарождения разрушений плоскими скоплениями скользящих дислокаций у барьеров. Модели предельной прочности для скоплений дислокаций также противоречивы из-за необходимости рассматривать барьеры с еще большей прочностью [3]. Таким образом, взаимодействие дислокаций с точечными дефектами присутствуют в большом числе явлений и актуально для твердотельных технологий. Это взаимодействие учитывается в кинетической модели скалярной плотности дислокаций путем введения зависимости плотности переползающих и размножающихся дислокаций ν от диффузионной ползучести точечных дефектов [6].

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Студент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru@yandex.ru

Целью данной работы является исследование кинетики и распределения плотности переползающих дислокаций ν для сильно изогнутых пластин.

Известно, что упругий изгиб ζ связан выражением

$$\zeta \approx \frac{1}{2d\nu}, \tag{1.1}$$

с плотностью переползающих дислокаций, т.к. они играют определяющую роль в этом виде напряженного состояния [2]: где d - расстояние между стенками в изогнутом кристалле.

В то же время, упругий изгиб ζ плоской пластины и компоненты смещений при растяжениях: связаны соотношениями [5]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{2(1+\sigma)}{E}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma\sigma_{yy}), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \sigma\sigma_{xx}), \tag{1.4}$$

где E, σ - модули Юнга и Пуассона, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ - компоненты тензора напряжений.

Если задана внешняя сила P, толщина пластины h, то равновесное напряженное состояние при преимущественном растяжении задается уравнениями [5]:

$$-\left[E\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right) + \sigma\sigma_{yy}\right]\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{P_{xx}}{h}, \tag{1.5}$$

$$-\left[E\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right) + \sigma\sigma_{xx}\right]\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{P_{yy}}{h}, \tag{1.6}$$

$$-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = \frac{P_{xy}}{h}, \tag{1.7}$$

где P_{xx}, P_{xy}, P_{yy} - компоненты внешней силы P, рассматриваемой как тензор.

Примем в данной работе в качестве упрощающих предположений, что

$$\beta\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{1.8}$$

$$\dot{\varepsilon_{xx}} = \sigma_{xx}\frac{Db^3}{d^2kT}, \tag{1.9}$$

где $\dot{\varepsilon_{xx}}$ - скорость диффузионной ползучести точечных дефектов [6], D - коэффициент диффузии, b - модуль вектора Бюргерса, T - температура,

k - постоянная Больцмана, β - постоянная величина. Условия (1.8), (1.9) характеризуют однокомпонентную динамику плоского изгиба пластины.

В силу (1.8) из (1.7) следует

$$-\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\frac{2(1+\sigma)P_{xy}}{hE}. \tag{1.10}$$

Из (1.3) и (1.5) вытекает

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=-\frac{P_{xx}}{\sigma_{xx}h}.$$

Подставив это выражение в (1.10), получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2=\frac{\sigma_{xx}2(1+\sigma)P_{xy}}{\beta E P_{xx}}. \tag{1.11}$$

Равенства (1.4) и (1.6) дают

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=-\frac{P_{yy}}{\sigma_{yy}h}. \tag{1.12}$$

Записывая с учетом (1.8) уравнение (1.7) в виде

$$-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right)\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=\frac{P_{xy}}{h},$$

с использование равенства (1.12) приходим к выражению

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}+\beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2=\frac{\sigma_{yy}2(1+\sigma)P_{xy}\beta}{E P_{yy}}. \tag{1.13}$$

Как указано в [1], скорость пластической деформации $\dot\varepsilon_{xx}$ имеет вид

$$\dot\varepsilon_{xx}=\dot\nu b l_x+\nu b V_y, \tag{1.14}$$

где l_x - длина пути скольжения дислокации при растяжении вдоль оси x, V_y - средняя скорость перемещения краевых дислокаций, которая имеет вид [1]:

$$V_y=\frac{-2\pi c_0 D\Omega}{b\ln(L/r_0)kT}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}), \tag{1.15}$$

где c_0 - плотность точечных дефектов, L - длина дислокации, Ω - атомный объем вакансий, r_0 - диаметр ядра дислокации.

Далее, примем в соответствии с [2], что

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=\nu b(l_1+l_2), \tag{1.16}$$

где l_1, l_2 - пути переползания при размножении ν.

Из (1.1) следует

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{-1}{2d\nu^2}\frac{\partial \nu}{\partial x}. \tag{1.17}$$

С учетом (1.16), (1.17) выводим из (1.11):

$$\sigma_{xx} = \frac{\nu b(l_1+l_2)\beta E P_{xx}}{P_{xy}2(1+\sigma)} + \frac{\beta^2 E P_{xx}}{4d^2 P_{xy}2(1+\sigma)}\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.18}$$

Также с учетом (1.16), (1.17) выводим из (1.13):

$$\sigma_{yy} = \frac{\nu b(l_1+l_2) E P_{yy}}{\beta P_{xy}2(1+\sigma)} + \frac{E P_{yy}}{4d^2 P_{xy}2(1+\sigma)}\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.19}$$

В результате из (1.18) - (1.19) следует

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{\beta^2 P_{xx} - P_{yy}}{\beta P_{xy}2(1+\sigma)} Eb(l_1+l_2)\nu + \frac{\beta^2 P_{xx} - P_{yy}}{8d^2 P_{xy}(1+\sigma)} E\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2. \tag{1.20}$$

Теперь подставив (1.9),(1.15),(1.18) и (1.20) в (1.14), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\lambda}{\nu^3}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.21}$$

где

$$\lambda = g - \frac{\gamma}{\nu}, \qquad \gamma = \frac{\beta E P_{xx} D b^2}{8 l_x P_{xy}(1+\sigma) d^4 KT}, \qquad A = \frac{\beta E P_{xx} D b^3 (l_1+l_2)}{2 l_x P_{xy}(1+\sigma) d^2 KT},$$

$$g = \frac{\pi c_0 D\Omega E(P_{yy} - \beta^2 P_{xx})}{4 b l_x \ln(L/r_0) KT(1+\sigma) P_{xy} d^2}, \qquad B = \frac{\pi c_0 D\Omega E(P_{yy} - \beta^2 P_{xx})(l_1+l_2)}{l_x \ln(L/r_0) KT\beta(1+\sigma) P_{xy}}.$$

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности переползающих дислокаций (1.21) назовем лиминальным, т.к. для его решений возможны критические значения, кардинально меняющие характер поведения решений. Эти критические значения определяются из условия

$$g - \frac{\gamma}{\nu_{cr}} = 0,$$

откуда следует, что

$$\nu_{cr} = \frac{\gamma}{g} = \frac{\beta b^3 \ln(L/r_0) P_{xx}}{2\pi d^2 (P_{yy} - \beta^2 P_{xx})}.$$

Сделаем ещё одно упрощающее предположение. При изучении поведения решения уравнения (1.21) отдельные исследования необходимы, чтобы определить условия, при которых решения дифференциального уравнения первого порядка не выходят из заданной ограниченной области. В данной работе этого аспекта задачи касаться не будем и примем, что $x \in \mathbb{R}^1$. Так что начальное условие для уравнения (1.21) зададим в виде:

$$\nu(0,x) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.22}$$

Таким образом, задача (1.21)-(1.22) определена в области

$$\Omega_T = \{(t,x) : 0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}.$$

По своему физическому смыслу функция $\nu(t,x)$ является величиной положительной, так что в качестве исходного условия примем, что

$$\varphi(x) \ge C_\varphi > 0.$$

Так же, как в [4], применим для исследования разрешимости задачи (1.21)-(1.22) метод дополнительного аргумента [7]. В соответствии с изложенной в [4] схемой вначале преобразуем задачу (1.21)-(1.22) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.21) по x и введя новую неизвестную функцию $p(t,x) = \partial_x \nu(t,x),$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3q\nu - 4\gamma}{\nu^5} p^3 - 2B\nu p - Ap. \tag{1.23}$$

Из (1.21) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p \frac{\partial \nu}{\partial x} = -B\nu^2 + A\nu + \frac{g\nu - \gamma}{\nu^4} p^2. \tag{1.24}$$

Из (1.22) естественным образом следуют начальное условие для $p(t,x)$:

$$p(0,x) = \varphi'(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.25}$$

Составим для задачи (1.22),(1.23),(1.24),(1.25) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1(s,t,x), \qquad \eta(t,t,x) = x, \tag{1.26}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)} w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.27}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.28}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)} w_1^2(s,t,x), \tag{1.29}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.30}$$

Так как в правые части (1.22), (1.27), (1.29) функция η явным образом не входит, то задача (1.26), - (1.30) приводится к системе двух интегральных уравнений от двух неизвестных функций:

$$w_1 = 3g\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4}ds - 4\gamma\int_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5}ds - 2B\int_0^s w_0w_1ds + A\int_0^s w_1ds+ \tag{1.31}$$

$$+\varphi'\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right),$$

$$w_0 = g\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int_0^s w_0^2ds + A\int_0^s w_0ds+ \tag{1.32}$$

$$+\varphi\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right).$$

Локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.31) - (1.32) доказывается с помощью метода последовательных приближений. При этом промежуток разрешимости $0 < t \leq T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.21) - (1.22). Возможность определения границ области разрешимости рассматриваемой задачи в исходных координатах является одним из преимуществ метода дополнительного аргумента. Функции $p(t,x) = w_1(t,t,x), \nu(t,x) = w_0(t,t,x)$ дадут решение задачи (1.21)-(1.22), а функция $\nu(t,x)$ будет решением задачи (1.21) - (1.22). Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^1)$. *Тогда существует такое число* $\Upsilon > 0$, *что при* $0 < t < \Upsilon$ *задача Коши* (1.21) - (1.22) *имеет решение* $\nu(t,x) \in \overline{\mathbb{C}}^{1,2}([0,\Upsilon] \times \mathbb{R}^1)$, *которое определяется из решения системы интегральных уравнений* (1.31), - (1.32) *в виде* $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$.

Замечание 1.2. *Система интегральных уравнений* (1.31) - (1.32) *может быть использована для нахождения численного решения задачи в исходных координатах.*

Замечание 1.3. *Несмотря на внешне сложный вид, система дифференциальных уравнений* (1.26) - (1.30) *достаточно удобна для вывода априорных оценок и исследования свойств решений. В работе* [7] *исследования соответствующей системы дифференциальных уравнений позволили* *определить условия, при которых уравнение вида* $\partial_t v + v\partial_x v = f(t, x, v)$ *имеет решение на заданном промежутке изменения* t, *а в работе* [8] *определить условия, при которых стационарное уравнение* $(\nabla v)^2 = f(x_1, x_2, v)$ *имеет нелокальное решение в заданной области, определяемой физическими характеристиками задачи. В случае задачи* (1.26) - (1.30) *ситуация осложняется возможностью обращения коэффициента перед квадратом производной по* x *в нуль. Тем не менее, мы планируем в наших последующих статьях указать условия, при которых задача* (1.26) - (1.30) *имеет нелокальное решение.*

Список литературы

1. Косевич Д. М., *Основы механики криcлаллической решетки.*, Наука., М., 1972.
2. Фридель Ж., *Дислокации.*, Мир., М, 1967.
3. Бернштеин М. Л., Займовский В. А., *Механические свойства металлов.*, Металлургия., М., 1970.
4. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Алексеенко Н. С., “Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций с квадратичной нелинейностью”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 15 – 21.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука., М., 1987.
6. Кан Р. У., Хаазен П., *Физическое металловедение.*, Металлургия., М., 1987.
7. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.
8. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.
9. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

The liminal dissipative equation of the creeping dislocations density for a one-component bending of flat plate

© S. N. Alekseenko[4], S. N. Nagornykh[5], D. V. Khiteva[6]

Abstract. The differential equation in partial derivatives of the first order with a coefficient in front of the square of the first derivative with respect to the spatial variable, which can be equal to zero, is obtain. Using the method of an additional argument, there are defined conditions of its local solvability.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, nonlocal solvability, liminality, method of an additional argument.

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The student of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru