УДК 517.938.5

О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей с одномерными инвариантными множествами

© С. Х. Капкаева[1]

Аннотация. В работе найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на двумерных многообразиях и неблуждающее множество которых принадлежит инвариантному объединению конечного числа непересекающихся простых замкнутых кривых. Исследована взаимосвязь между динамикой таких диффеоморфизмов и топологией объемлющего многообразия. Для содержательного подкласса таких систем получена их топологическая классификация

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологическая сопряженность, аттрактор, репеллер

1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла* на многообразии M^n, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество[2] Ω диффеоморфизма f гиперболично и конечно (то есть состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);

2. для любых различных периодических точек p, q диффеоморфизма f устойчивое многообразие W^s_p и неустойчивое многообразие W^u_q либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Неблуждающее множество Ω диффеоморфизма Морса-Смейла f представим в виде $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Omega_i$, где Ω_i — множество периодических точек диффеоморфизма f, индекс Морса[3] которых равен i ($i = 0, 1, ..., n$). Периодическая точка, индекс Морса которой равен 0(n) называется стоковой (источниковой), периодическая точка индекс Морса которой не равен ни 0, ни n называется седловой точкой.

Компоненты связности $W^s_p \setminus p$ $(W^u_p \setminus p)$ седловой точки p называются *устойчивыми (неустойчивыми) сепаратрисами* седла p.

[1] Магистрантка факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

[2] Для диффеоморфизма f точка $x \in X$ называется блуждающей, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для $t \in \mathbb{N}$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω.

[3] *Индексом Морса* периодической точки p называется число, равное размерности неустойчивого многообразия W^u_p

Если f — диффеоморфизм Морса-Смейла и p его периодическая точка, то пересечение $W^s_p \cap W^u_p$ состоит в точности из одной точки p. Если для различных седловых периодических точек p, q пересечение $W^s_p \cap W^u_q \neq \emptyset$, то оно является бесконечным множеством. При этом если $dim\ W^s_p + dim\ W^u_q = n$, то множество $W^s_p \cap W^u_q$ является нульмерным и каждая точка этого множества называется *гетероклинической*, а если $dim\ W^s_p + dim\ W^u_q > n$, то каждая компонента связности $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической компонентой*.

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если он не имеет гетероклинических точек.

Диффеоморфизмы f, $f' : M^n \to M^n$ называются *топологическими сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ такой, что $f' = hfh^{-1}$.

Далее мы рассматриваем градиентно-подобные диффеоморфизмы Морса-Смейла на двумерном многообразии M^2. В этом случае условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ является пустым, для любых различных седловых точек p, q. Неблуждающее множество Ω диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ представляется в следующем виде: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_0, Ω_1, Ω_2 — множества стоковых, седловых, источниковых точек диффеоморфизма f соответственно. Будем предполагать также, что множество $\Omega_1 \neq \emptyset$, в противном случае его неблуждающее множество состоит из одного источника и одного стока. Все диффеоморфизмы "источник-сток" топологически сопряжены и доказательство этого факта приведено, например, в книге [2] (Теорема 2.2.1).

В 1973 году М. Пейшото [7] классифицировал потоки Морса-Смейла без замкнутых траекторий с помощью различающего графа. В 1985-1987 годах В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных была получена топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях (подробное изложение результатов имеется в книге [2]). А. А. Ошемков и В. В. Шарко в работе [6] предложили поставить в соответствие каждому потоку Морса-Смейла без замкнутых траекторий трехцветный граф. Как оказалось, проверка изоморфности трехцветных графов существенно проще проверки изоморфности графов Пейшото.

В работах [3], [4] идеи статьи [6] были применены для топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерных многообразий посредством трехцветных графов, оснащенных автоморфизмами, индуцированными диффеоморфизмами на вершинах графов.

В настоящей работе выделяется класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество каждого из которых принадлежит инвариантному объединению конечного числа непересекающихся простых замкнутых кривых, и показывается, что классификация таких диффеоморфизмов сводится к классификации грубых диффеоморфизмов окружности, полученной А.Г. Майером [5].

Более точно, будем говорить, что градиентно-подобный диффеоморфизм f принадлежит классу G, если Ω_1 представляется в виде объединения $\Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$ удовлетворяющего следующим условиям:

1. $cl\ W^u_{\Omega_1^+} \cup cl\ W^s_{\Omega_1^-}$ состоит из конечного числа попарно не пересекающихся компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности;

2. $(\Omega_0 \cup \Omega_2) \subset (cl\ W^u_{\Omega_1^+} \cup cl\ W^s_{\Omega_1^-})$.

Положим $\mathcal{A}_f = cl\ W^u_{\Omega_1^+}$ и $\mathcal{R}_f = cl\ W^s_{\Omega_1^-}$. Согласно теореме 2.2.2 книги [2] множество $\mathcal{A}_f$ ($\mathcal{R}_f$) является аттрактором[4] (репеллером[5]) диффеоморфизма f.

Используя схему доказательства теоремы 1 работы [1], можно получить следующую классификацию поверхностей, допускающих диффеоморфизмы из класса G.

Теорема 1.1. *Пусть многообразие M^2 допускает диффеоморфизм из класса G. Тогда M^2 диффеоморфно либо тору $\mathbb{T}^2$, либо бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$.*

Обозначим через $\tilde{G}$ подмножество класса G такое, что для диффеоморфизма $f \in \tilde{G}$ выполняются следующие свойства:

1) все компоненты связности множества $\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$ содержат одинаковое число неблуждающих точек;

2) $cl\ (W^s_{\sigma^1_+}) \cap cl\ (W^s_{\sigma^2_+}) = \emptyset$ для различных седловых точек σ^1_+, σ^2_+, принадлежащих одной и той же компоненте связности аттрактора $\mathcal{A}_f$;

3) $cl\ (W^u_{\sigma^1_-}) \cap cl\ (W^u_{\sigma^2_-}) = \emptyset$ для различных седловых точек σ^1_-, σ^2_-, принадлежащих одной и той же компоненте связности репеллера $\mathcal{R}_f$.

В разделе 2. вводится класс Φ модельных диффеоморфизмов на многообразиях $\mathbb{T}^2$ и $\mathbb{K}^2$, относительно которого справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Любой диффеоморфизм $f \in \tilde{G}$ топологически сопряжен некоторому модельному из класса Φ.*

[4] Пусть f — гомеоморфизм компактного метрического пространства X. Компактное f-инвариантное множество $A \subset X$ называется аттрактором дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$

[5] Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1}.

2. Построение модельного диффеоморфизма

Для описания динамики диффеоморфизмов класса G напомним топологическую классификацию структурно-устойчивых диффеоморфизмов на окружности.

Пусть $MS(\mathbb{S}^1)$ класс структурно устойчивых преобразований окружности, который, в силу результатов А.Г. Майера [5], совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Разобъем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Ниже формулируются результаты Майера о топологической классификации структурно устойчивых преобразований окружности.

Предложение 2.1.

1. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $\Omega(\varphi)$ состоит из $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) периодических орбит, каждая из которых имеет период k.

2. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $\Omega(\varphi)$ состоит из $2q$ ($q \in \mathbb{N}$) периодических точек, две из которых неподвижны, а остальные имеют период 2.

Положим $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Занумеруем периодические точки неблуждающего множества $\Omega(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, где l целое число, такое что для $k = 1$ положим $l = 0$, для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и (k, l) взаимно просты[6]. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0.

Предложение 2.2.

1. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- *$l = l'$ (при этом, если $l \neq 0$ тогда сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),*
- *$l = k' - l'$ (при этом, сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).*

2. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $q; q'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$.

[6] В действительности, А.Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое он называл *порядковым числом*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

Для этого сначала построим модели грубых преобразований окружности S^1, представляя её как факторпространство $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $\pi : \mathbb{R} \to S^1$.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ взаимно просто с k, построим стандартного представителя φ_+ в $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- в $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметром q.

Для этого введем следующие отображения:
$\tilde{\psi}_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\tilde{\chi}_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\chi}_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\tilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\chi}(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\chi}_{k,l}\tilde{\psi}_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \tilde{\chi}\tilde{\psi}_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Таким образом,
$\tilde{\varphi}_+(r) = \tilde{\psi}_{n\cdot k}(r) - \frac{l}{k}$ и $\tilde{\varphi}_+(r+\nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$;
$\tilde{\varphi}_-(r) = -\tilde{\psi}_q(r)$ и $\tilde{\varphi}_-(r+\nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$.

Следовательно следующие диффеоморфизмы корректно определены: $\varphi_\sigma = \pi\tilde{\varphi}_\sigma\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \sigma \in \{+,-\}$, $\chi = \pi\tilde{\chi}\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Используя $\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \sigma_1, \sigma_2 \in \{+,-\}$ построим модельный диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) на $\mathbb{T}^2$ ($\mathbb{K}^2$).

Для этого определим диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ формулой $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}(z_1, z_2) = (\varphi_{\sigma_1}(z_1), \varphi_{\sigma_2}(z_2))$, где $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Представим многообразие $\mathbb{K}^2$ как пространство орбит $\mathbb{K}^2 = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (\chi(z), r-1)$. Обозначим через $p_\chi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}^2$ естественную проекцию. Обозначим через $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}(z, r) = (\varphi_{\sigma_1}(z), \tilde{\varphi}_{\sigma_2}(r))$. Так как Γ — циклическая группа с образующей $\gamma(z, r) = (\chi(z), r-1)$, то либо $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}\gamma = \gamma\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}$, либо $\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}\gamma^{-1} = \gamma\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}$ является необходимым и достаточным условием, позволяющим задать диффеоморфизм $\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ как $\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2} = p_\chi\tilde{\varphi}^-_{\sigma_1\sigma_2}p_\chi^{-1}$ (см., например, [2]). Из этого следует, что $\varphi_{\sigma_1}\chi = \chi\varphi_{\sigma_1}$, что равносильно тому, что существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tilde{\varphi}_{\sigma_1}(-r) + m = -\tilde{\varphi}_{\sigma_1}(r)$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Если $\sigma_1 = -$, то последнему соотношению удовлетворяет $m = 0$. Если же $\sigma_1 = +$, то приходим к равенству $2l = mk$, откуда, учитывая условие $0 \leq l < k$ и взаимную простоту l и k, получаем либо $m = 0, l = 0, k = 1$, либо $m = 1, l = 1, k = 2$.

Обозначим $\Phi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\Phi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) множество диффеоморфизмов $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$). Положим $\Phi^+ = \Phi^+_{++} \cup \Phi^+_{+-} \cup \Phi^+_{-+} \cup \Phi^+_{--}$ ($\Phi^- = \Phi^-_{++} \cup \Phi^-_{+-} \cup \Phi^-_{-+} \cup \Phi^-_{--}$) и $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Каждый диффеоморфизм $\varphi^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\varphi^-_{\sigma_1\sigma_2}$) однозначно определяется набором параметров $\zeta^+_{\sigma_1\sigma_2}$ ($\zeta^-_{\sigma_1\sigma_2}$) следующих типов:

1. $\zeta^+_{++} = \{n_1, k_1, l_1, n_2, k_2, l_2\}$;
2. $\zeta^+_{+-} = \zeta^+_{-+} = \zeta^-_{-+} = \{n, k, l, q\}$;
3. $\zeta^+_{--} = \zeta^-_{--} = \{q_1, q_2\}$;
4. $\zeta^-_{++} = \{n_1, k_1, n_2, k_2, l_2\}$, где $k_1 = 1$ или $k_1 = 2$;
5. $\zeta^-_{+-} = \{n, k, q\}$, где $k = 1$ или $k = 2$.

Следующий результат обеспечивает алгебраический критерий топологической сопряженности диффеоморфизмов класса Φ.

Лемма 2.1. *Два диффеоморфизма $\varphi, \varphi' \in \Phi$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда наборы их параметров имеют одинаковый тип и для каждого из типов выполняются следующие равенства:*

1. $n_i = n'_i, k_i = k'_i$, $l_i = l'_i$ или $l_i = k'_i - l'_i$ для $i \in \{1, 2\}$;

2. $n = n', k = k'$, $q = q'$, $l = l'$ или $l = k' - l'$;

3. $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$;

4. $n_i = n'_i, k_i = k'_i$ для $i \in \{1, 2\}$, $l_2 = l'_2$ или $l_2 = k'_2 - l'_2$;

5. $n = n', k = k'$, $q = q'$.

Благодарности. Автор благодарит В.З. Гринеса за поставленную задачу и плодотворные обсуждения, а также О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-12452-офи-м.

Список литературы

1. Гринес В. З., Левченко Ю. А. Починка О. В, "О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами", *Нелинейная динамика*, **1**, 10 (2014), 1-17.

2. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

3. Гринес В. З., Капкаева С. Х., "Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством трехцветного графа", *Журнал СВМО*, **2**, 15 (2013), 12-22.

4. Капкаева С. Х., "О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа", *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34-43.

5. Майер А. О, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.

6. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

7. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

8. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи математических наук*, **1(151)**, XXV (янв-февр 1970), 113-185.

On the topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional invariant sets

© S. H. Kapkaeva[7]

Abstract. In the paper we found conditions for the topological conjugacy of gradient-like 2-diffeomorphisms whose nonwandering set belongs to the invariant finite union of disjoint simple closed curves. The interrelation between the dynamics of diffeomorphisms and the topology of the ambient manifold is established. For a meaningful subclass of such systems their topological classification obtained

Key Words: Morse-Smale gradient-like diffeomorphism topological conjugacy, attractor, repeller

[7] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.