УДК 519.63

О некоторых итерационных процессах решения эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями с конструктивными оценками скорости сходимости итераций

© **Ф. В. Лубышев[1], М. Э. Файрузов[2]**

Аннотация. В работе изучается приближенное решение контактных граничных задач для уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением, когда на контактирующих внутренних границах многослойных сред задаются условия сопряжения типа неидеального контакта. Разработан и обоснован итерационный метод решения указанных классов задач с разрывными коэффициентами и решениями для УМФ эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса. Причем установлены конструктивные оценки скорости сходимости итераций (с вычисляемыми константами).

Ключевые слова: итерационный метод, математическое моделирование, эллиптическое уравнение, задачи для УМФ с разрывными коэффициентами и решениями, оператор

1. Введение

В работе изучается приближенное решение контактных граничных задач для уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением, когда на контактирующих внутренних границах многослойных сред задаются условия сопряжения типа неидеального контакта. Подобные задачи возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др., при исследовании обратных задач, задач оптимального управления для уравнений математической физики (УМФ) в многослойных средах. В таких задачах, в силу характера исследуемых физических процессов, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ, описывающих состояния управляемых процессов, допускают разрывы [1]-[4]. Разработка методов решения контактных задач для УМФ с разрывными коэффициентами и решениями является актуальной проблемой. Системы управления, состояния в которых описываются подобными УМФ наименее изучены, хотя развитие теории и методов решения таких систем вызвано потребностями математического моделирования оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач. Проблема приближенного решения задач данного класса для УМФ с разрывными коэффици-

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

ентами и решениями приводит к необходимости разработки эффективных, экономичных, высокоточных приближенных методов их решения. В частности, возникает проблема разработки эффективных сходящихся итерационных методов решения указанного класса задач для УМФ, а также проблемы разработки и реализации конечномерных аппроксимаций (см., например, [1], [5] - [9]) итерационных задач на каждом итерационном шаге.

В настоящей работе разработан и обоснован итерационный метод решения уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса. Причем установлены конструктивные оценки скорости сходимости итераций (с вычисляемыми константами). В результате численное решение задач данного класса УМФ можно эффективно осуществлять на основе применения разработанного итерационного метода (с итерациями на внутренней границе разрыва решения и коэффициентов) в сочетании, например, с разностными методами решения некоторых уже традиционных "самостоятельных"краевых задач, возникающих при этом в каждой из контактирующих подобластей составной области интегрирования.

2. Постановка задачи и ее корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \le r_2 \le l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты u_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1, 2$, уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(k)}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right) + q_k(x) u_k = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1, 2; \tag{2.2}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2) \left(u_2(x) - u_1(x) \right), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k_\alpha(x), q(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), q_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), q_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу $(2.1) - (2.3)$ можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x) u = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

условиям

$$\begin{gathered} u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = 0, \quad G(x) = \left(k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; а $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\theta(x_2)$, $\alpha = 1,2$ – известные функции. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $q(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(x_2) \in L_\infty(S)$; $0 < \nu_1 \le k_\alpha^{(1)}(x) \le \overline{\nu}_1$, $0 < \nu_2 \le k_\alpha^{(2)}(x) \le \overline{\nu}_2$, $\alpha = 1,2$, $q(x) \ge 0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $0 < \theta_0 \le \theta(x_2) \le \theta_1$, $x \in S$, $\nu_\alpha, \overline{\nu}_\alpha, \theta_0, \theta_1$ – заданные константы.

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{ u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \right\}, \qquad (2.8)$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [10] – [14]

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \qquad (2.9)$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, \vartheta)_V = \sum_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \qquad (2.10)$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS, \qquad (2.11)$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $U(x)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространство $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с Липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [10] – [14] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^{\pm}$. С другой стороны, если элемент $u \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(x)$ на области Ω_k, $k = 1, 2$: принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(x)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(x) = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$, $x \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $\vartheta(x) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$ является условие склейки: $\vartheta_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$; $\vartheta_1(x)|_S = \vartheta_2(x)|_S$ (см., например, [14], [15]).

Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1, 2$, то [16] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k = 1, 2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \leq C_k^2 \Bigg[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k \Bigg], \; k = 1, 2. \tag{2.12}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k = 1, 2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ в пространство $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(x)$, что для любых функций $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [11], [12]:

$$\|u_k\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \leq C_{k+2}^2 \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \; k = 1, 2, \tag{2.13}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$.

Заметим, что для элементов $u_k(x) \in W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ справедливо неравенство [11]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(x) d\Omega_k \leq C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.14}$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k)$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k)$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k) > 0$.

Под обобщенным решением краевой задачи (2.1) – (2.3) понимается пара функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ таких, что $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k; \Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + q_1(x) u_1 v_1\right] d\Omega_1 - \int\limits_S \theta(x)[u] v_1 \, dS = \\ = \int\limits_{\Omega_1} f_1(x) v_1 \, d\Omega_1, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1),\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + q_2(x) u_2 v_2\right] d\Omega_2 - \int\limits_S \theta(x)[u] v_2 \, dS = \\ = \int\limits_{\Omega_2} f_2(x) v_2 \, d\Omega_2, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\right\} \tag{2.17}$$

с нормой:

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS. \tag{2.18}$$

Тогда обобщенное решение задачи (2.1) – (2.3) можно сформулировать в более компактном виде, а именно, под решением задачи (2.1) – (2.3) понимается функция $u(x) \equiv u(x; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех

$\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right] d\Omega_0 + \int\limits_{S} \theta(x)[u][\vartheta]dS =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta). \tag{2.19}$$

Из (2.19) при $v^+(x) = v_2(x) = 0$ следует (2.15), а при $v^-(x) = v_1(x) = 0$ следует соотношение (2.16).

Разрешимость задачи (2.1) – (2.3) в смысле ее определения (2.19) гарантируется следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.1. *Существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (2.1) – (2.3), *определяемое из интегрального тождества* (2.19). *Задача о нахождении обобщенного решения из* (2.19) *эквивалентна решению операторного уравнения $Au = F$, где оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется билинейной формой $Q(u,\vartheta)$ с помощью равенства $(A\,u,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,\vartheta)$, $\forall u,\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка*

$$\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)},$$

где $C = Const > 0$.

Доказательство теоремы 2.1. опирается на лемму Лакса-Мильграма [16], при этом существенно используются введенные выше гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.12) – (2.14).

3. Итерационный процесс для задачи о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением с итерациями на внутренней границе решения и его сходимость

Задаче (2.1) – (2.3) поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней границе S:

$$L_1u_1^n = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\right) + q_1(x)u_1^n = f_1(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{3.1}$$

$$u_1^n(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \tag{3.2}$$

$$k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + \theta(x_2)u_1^n = \theta(x_2)u_2^{n-1}, \qquad x \in S; \tag{3.3}$$

$$L_2 u_2^n = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\right) + q_2(x)u_2^n = f_2(x), \qquad x \in \Omega_2, \tag{3.4}$$

$$u_2^n(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \tag{3.5}$$

$$-k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} + \theta(x_2)u_2^n = \theta(x_2)u_1^n, \qquad x \in S; \tag{3.6}$$

где $n = 1, 2, \ldots;$ $u_2^0(x)$ – начальное приближение.

Таким образом, итерационный процесс $(3.1)-(3.6)$ сводит решение исходной граничной задачи $(2.1)-(2.3)$ с разрывными коэффициентами и решением к решению на каждой итерации n двух граничных задач $(3.1)-(3.3)$ и $(3.4)-(3.6)$ в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ состоит в отыскании последовательности пар функций $\{u^n(x)\} = \left\{\left(u_1^n(x), u_2^n(x)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $u_k^n(x) \in W_2^1(\Omega_k;\Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}\frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + q_1(x)u_1^n v_1\right]d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x)u_1^n v_1\,dS =$$
$$= \int\limits_S \theta(x)u_2^{n-1}v_1 dS + \int\limits_{\Omega_1} f_1(x)v_1 d\Omega_1, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1), \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}\frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + q_2(x)u_2^n v_2\right]d\Omega_2 + \int\limits_S \theta(x)u_2^n v_2\,dS =$$
$$= \int\limits_S \theta(x)u_1^n v_2 dS + \int\limits_{\Omega_2} f_2(x)v_2 d\Omega_2, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2); \tag{3.8}$$

$n = 1, 2, \ldots;$ $u_2^0(x)$ – начальное приближение.

Используя лемму Лакса-Мильграма [16] нетрудно убедиться в однозначной разрешимости задач (3.7) и (3.8) относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ в классах $W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)$ и $W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)$ (при каждом фиксированном номере n) соответсвенно.

Докажем сходимость итрерационного процесса $(3.1)-(3.6)$ (в обобщенной постановке сходимость итерационного процесса (3.7) и (3.8)).

Справедлива следующая теорема о сходимости итерационного процесса $(3.1)-(3.6)$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено условие:*

$$q = q_1 q_2 < 1$$

где

$$q_1^2 = \frac{1}{\nu_1}\|\theta(x_2)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{l_1-\xi_1}{4}+\frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right], \quad q_2^2 = \frac{1}{\nu_2}\|\theta(x_2)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{\xi_1}{4}+\frac{M_1^2}{2\xi_1}\right],$$

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}.$$

Тогда итерационный процесс $(3.1)-(3.6)$ *сходится в норме*

$$\|v\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [v]^2\,dS,$$

(а значит и в норме $\|v\|_{V(\Omega^{(1,2)})}$, *в силу их эквивалентности) к единственному решению задачи* $(2.1)-(2.3)$ *при любом начальном приближении* $u_2^{(0)} \in W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)$ *и справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\begin{cases} |z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1|z_2^{(n-1)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_2|z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)}, \quad n=1,2,...; \\ |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_1q_2|z_2^{(n-1)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_2^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q^n|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_1^{(n)}|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1q^{n-1}|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|z_1^{(n)}\|_{L_2(\Omega_1)} \le M_1q_1q^{n-1}|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad |z_2^{(n)}|_{L_2(\Omega_2)} \le M_2q^n|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|z_1^{(n)}\|_{L_2(S)} \le \left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2+\xi_1\right]^{1/2} q_1q^{n-1}|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|z_2^{(n)}\|_{L_2(S)} \le \left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2+l_1-\xi_1\right]^{1/2} q^n|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad n=1,2,...; \\ \|[z^{(n)}]\|^2_{L_2(S)} \le 2\left\{\left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2+\xi_1\right](q_1q^{n-1})^2+\left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2+l_1-\xi_1\right](q^n)^2\right\}|z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \\ n=1,2,...; \end{cases}$$

где

$$|v_k|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \qquad k=1,2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интегральное тождество (2.19), определяющее обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи $(2.1)-(2.3)$.

Это тождество можно переписать также в виде:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)u_kv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)u_kv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(u_2v_1+u_1v_2\big)dS+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}f_k(x)v_kd\Omega_k,\qquad\forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\quad(3.9)$$

Далее, интегральные тождества (3.7), (3.8) относительно определения последовательности $u^n(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)u_k^nv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)u_k^nv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(u_2^{n-1}v_1+u_1^nv_2\big)dS+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}f_k(x)v_kd\Omega_k,\qquad\forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\quad(3.10)$$

Из (3.10) при $v_1=0$ следует (3.7), а при $v_2=0$ следует (3.8).

Для оценки скорости сходимости метода итераций при $n\to\infty$ введем в рассмотрение величины:

$$z^n(x)=\begin{cases}z_1^n(x)=u_1^n(x)-u_1(x), & x\in\Omega_1;\\ z_2^n(x)=u_2^n(x)-u_2(x), & x\in\Omega_2,\end{cases}\qquad(3.11)$$

Из (3.9), (3.10) следует

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial z_k^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+q_k(x)z_k^nv_k\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)z_k^nv_k\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(z_2^{n-1}v_1+z_1^nv_2\big)dS,\qquad\forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}).\quad(3.12)$$

Полагая в (3.12) $v=z^n$, получим

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(k)}(x)\left(\frac{\partial z_k^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_k(x)(z_k^n)^2\right]d\Omega_k+\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S}\theta(x)(z_k^n)^2\,dS=$$

$$=\int\limits_{S}\theta(x)\big(z_1^nz_2^{n-1}+z_1^nz_2^n\big)dS.\quad(3.13)$$

Из (3.7), (3.8) и (2.15), (2.16) вытекают также следующие соотношения:

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha}+q_1(x)z_1^n v_1\right]d\Omega_1+\int\limits_S\theta(x)z_1^n v_1\,dS=$$
$$=\int\limits_S\theta(x)z_2^{(n-1)}v_1\,dS,\qquad\forall v_1(x)\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1),\tag{3.14}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha}+q_2(x)z_2^n v_2\right]d\Omega_2+\int\limits_S\theta(x)z_2^n v_2\,dS=$$
$$=\int\limits_S\theta(x)z_1^n v_2\,dS,\qquad\forall v_2(x)\in W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2).\tag{3.15}$$

При $v_1=z_1^n$, $v_2=z_2^n$ из (3.14), (3.15) получаем соотношения:

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(1)}(x)\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_1(x)(z_1^n)^2\right]d\Omega_1+\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS=$$
$$=\int\limits_S\theta(x)z_2^{n-1}z_1^n dS,\tag{3.16}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha^{(2)}(x)\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2+q_2(x)(z_2^n)^2\right]d\Omega_2+\int\limits_S\theta(x)(z_2^n)^2\,dS=$$
$$=\int\limits_S\theta(x)z_1^n z_2^n dS.\tag{3.17}$$

Оценим правую часть в соотношении (3.16). Имеем

$$\int\limits_S\theta(x)z_2^{n-1}z_1^n\,dS=\int\limits_S\theta^{1/2}(x)z_2^{n-1}\theta^{1/2}(x)z_1^n\,dS\le\left(\int\limits_S\theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS\right)^{1/2}\le\varepsilon\int\limits_S\theta(x)(z_1^n)^2\,dS+\frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S\theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS,\quad\forall\varepsilon>0\tag{3.18}$$

Поэтому из соотношения (3.16) получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x)\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 + q_1(x)(z_1^n)^2\right] d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le$$
$$\le \varepsilon\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS + \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS. \qquad (3.19)$$

Откуда

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)}(x)\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 + q_1(x)(z_1^n)^2\right] d\Omega_1 + (1-\varepsilon)\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le$$
$$\le \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS, \qquad \forall\varepsilon > 0. \qquad (3.20)$$

Аналогично из (3.17) можно установить неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)}(x)\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 + q_2(x)(z_2^n)^2\right] d\Omega_2 + (1-\varepsilon)\int\limits_S \theta(x)(z_2^n)^2\,dS \le$$
$$\le \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS, \qquad \forall\varepsilon > 0. \qquad (3.21)$$

Соотношения (3.20) и (3.21) будем называть основными неравенствами. Принимая во внимание ограничения

$$k_\alpha^{(1)}(x) \ge \nu_1 > 0, \quad k_\alpha^{(2)}(x) \ge \nu_2 > 0, \quad q_1(x) \ge 0, \quad q_2(x) \ge 0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \qquad (3.22)$$

установим оценки:

$$\nu_1\int\limits_{\Omega_1}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_1 \le \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS, \qquad 0 < \varepsilon \le 1, \qquad (3.23)$$

$$\nu_2\int\limits_{\Omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_2 \le \frac{1}{4\varepsilon}\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS, \qquad 0 < \varepsilon \le 1. \qquad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что справедливы следующие леммы

Л е м м а 3.1. *Для любых функций $v_1 \in W_2^1(\Omega_1)$ и $v_2 \in W_2^1(\Omega_2)$ справедливы неравенства*

$$\|v_1\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{\xi_1}\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \qquad (3.25)$$

$$\|v_2\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{l_1-\xi_1}\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}. \tag{3.26}$$

Л е м м а 3.2. *Для любых функций $v_1 \in W^1_2(\Omega_1)$ и $v_2 \in W^1_2(\Omega_2)$ справедливы неравенства*

$$\|v_1\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \frac{1}{\pi}\max\{2\xi_1; l_2\}\|v_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$

$$\|v_2\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} + $$
$$+\tfrac{1}{\pi}\max\{2(l_1-\xi_1); l_2\}\|v_2\|^2_{L_2(\Gamma_2)}. \tag{3.27}$$

Оценим теперь правые части неравенств (3.23), (3.24).

В силу (3.25), (3.26) имеем оценки:

$$\int_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} \le$$
$$\le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{\xi_1}\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}\right], \tag{3.28}$$

$$\int_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(S)} \le$$
$$\le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{(l_1-\xi_1)}\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}\right]. \tag{3.29}$$

Далее, так как $z_1^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, $z_2^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_2$, то применение неравенств (3.27) к функциям $z_1^n(x)$ и $z_2^n(x)$ дает оценки:

$$\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le M_1^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \tag{3.30}$$

$$\|z_2^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le M_2^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}, \tag{3.31}$$

где

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\}. \tag{3.32}$$

Так что из оценок (3.28), (3.29) и (3.30) – (3.32) установим:

$$\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{\xi_1}M_1^2\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}\right], \tag{3.33}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} + \right. \\ \left. +(l_1-\xi_1)\left\|\tfrac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}\right].\end{gathered} \tag{3.34}$$

Откуда имеем

$$\int\limits_S \theta(x)(z_1^n)^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\xi_1+\frac{2}{\xi_1}M_1^2\right]\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \tag{3.35}$$

$$\int\limits_S \theta(x)(z_2^{n-1})^2\,dS \le \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[(l_1-\xi_1)+\frac{2}{l_1-\xi_1}M_2^2\right]\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}. \tag{3.36}$$

Принимая во внимание оценки (3.35), (3.36) из (3.23), (3.24) найдем

$$\int\limits_{\Omega_1}\sum_{\alpha=1}^2\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_1 \le \frac{1}{\nu_1\varepsilon}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{l_1-\xi_1}{4}+\frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right]\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_2^{n-1}}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}, \tag{3.37}$$

$$\int\limits_{\Omega_2}\sum_{\alpha=1}^2\left(\frac{\partial z_2^n}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_2 \le \frac{1}{\nu_2\varepsilon}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left[\frac{\xi_1}{4}+\frac{M_1^2}{2\xi_1}\right]\sum_{\alpha=1}^2\left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \tag{3.38}$$

$$0<\varepsilon\le 1.$$

В частности, при $\varepsilon=1$ получаем оценки:

$$|z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1^2|z_2^{(n-1)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n=1,2,..., \tag{3.39}$$

$$|z_2^n|^2_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_2^2|z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)}, \qquad n=1,2,..., \tag{3.40}$$

где

$$q_1^2=\frac{1}{\nu_1}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left(\frac{l_1-\xi_1}{4}+\frac{M_2^2}{2(l_1-\xi_1)}\right), \tag{3.41}$$

$$q_2^2=\frac{1}{\nu_2}\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}\left(\frac{\xi_1}{4}+\frac{M_1^2}{2\xi_1}\right), \tag{3.42}$$

$$M_1^2=\frac{2}{\pi^2}\max\bigl\{4\xi_1^2;l_2^2\bigr\}, \qquad M_2^2=\frac{2}{\pi^2}\max\bigl\{4(l_1-\xi_1)^2;l_2^2\bigr\}, \tag{3.43}$$

$$|v_k|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} \right\|^2_{L_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.44}$$

Из оценок (3.39), (3.40) следует

$$|z_2^n|^2_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_2^2 |z_1^n|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1^2 q_2^2 |z_2^{n-1}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \tag{3.45}$$

т.е. имеем оценку

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_1 q_2 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.46}$$

Таким образом установлена пара оценок

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_1 q_2 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.47}$$

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.48}$$

Следовательно, $z_2^n = u_2^n - u_2$, $z_1^n = u_1^n - u_1$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, если

$$q = q_1 q_2 < 1, \tag{3.49}$$

т.е. сходимость в норме $|\cdot|_{W_2^1(\Omega)}$ доказана при выполнении условия (3.49).

Условие (3.49) в подробной записи имеет вид

$$q = q_1 q_2 = \frac{1}{(\nu_1 \nu_2)^{1/2}} \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)} \left(\frac{\xi_1}{4} + \frac{M_1^2}{2\xi_1} \right)^{1/2} \left(\frac{l_1 - \xi_1}{4} + \frac{M_2^2}{2(l_1 - \xi_1)} \right)^{1/2} < 1, \tag{3.50}$$

$$M_1^2 = \frac{2}{\pi^2} \max\{4\xi_1^2; l_2^2\}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2} \max\{4(l_1 - \xi_1)^2; l_2^2\}. \tag{3.51}$$

Далее, из оценки (3.47) получаем оценку скорости сходимости для компоненты $z_2^n(x) = u_2^n(x) - u_2(x)$, $x \in \Omega_2$:

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad 0 < q = q_1 q_2 < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.52}$$

Далее, из оценок (3.48) и (3.52) имеем

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 |z_2^{n-1}|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \tag{3.53}$$

т.е. наряду с оценкой скорости сходимости (3.52) справедлива также оценка скорости сходимости для компоненты $z_1^n(x) = u_1^n(x) - u_1(x)$, $x \in \Omega_1$:

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.54}$$

Далее, как показано выше, справедливы оценки (3.52) и (3.54):

$$|z_1^n|_{W_2^1(\Omega_1)} \le q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, 3, ...;$$

$$|z_2^n|_{W_2^1(\Omega_2)} \le q^n |z_2^{(0)}|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad 0 < q = q_1 q_2 < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

С другой стороны, для оценки функций $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$, обладающих условиями $z_1^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, $z_2^n(x) = 0$, $x \in \Gamma_2$, можно применить неравенства (3.27) из леммы 3.2.:

$$\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le M_1^2 |z_1^{(n)}|^2_{W_2^1(\Omega_1)}, \qquad M_1^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\bigl\{4\xi_1^2; l_2^2\bigr\}, \tag{3.55}$$

$$\|z_2^n\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le M_2^2 |z_2^{(n)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad M_2^2 = \frac{2}{\pi^2}\max\bigl\{4(l_1-\xi_1)^2; l_2^2\bigr\}. \tag{3.56}$$

Принимая во внимание оценки (3.55), (3.56) из неравенств (3.52) и (3.54) устанавливаем оценки для $L_2(\Omega_1)$ – нормы и $L_2(\Omega_2)$ – нормы погрешностей $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$:

$$\|z_1^n\|_{L_2(\Omega_1)} \le M_1 q_1 q^{n-1} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.57}$$

$$\|z_2^n\|_{L_2(\Omega_2)} \le M_2 q^n |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.58}$$

Установим теперь оценки $L_2(S)$ – норм погрешностей $z_1^n(x)$, $x \in \Omega_1$, $z_2^n(x)$, $x \in \Omega_2$.

Используя оценки (3.25), (3.26) леммы 3.1., а также оценки (3.52), (3.54) и (3.57), (3.58) получаем:

$$\begin{gathered}\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{\xi_1}\|z_1^n\|^2_{L_2(\Omega_1)} + \xi_1 \left\|\frac{\partial z_1^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} \le \\ \le \frac{2}{\xi_1} M_1^2 \bigl(q_1 q^{n-1}\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + \xi_1 \bigl(q_1 q^{n-1}\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} = \\ = \left(\frac{2}{\xi_1} M_1^2 + \xi_1\right) \bigl(q_1 q^{n-1}\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)},\end{gathered} \tag{3.59}$$

$$\begin{gathered}\|z_2^n\|^2_{L_2(S)} \le \frac{2}{l_1-\xi_1}\|z_2^n\|^2_{L_2(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1) \left\|\frac{\partial z_2^n}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)} \le \\ \le \frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 \bigl(q^n\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + (l_1-\xi_1)\bigl(q^n\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} = \\ = \left(\frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 + l_1 - \xi_1\right) \bigl(q^n\bigr)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}.\end{gathered} \tag{3.60}$$

Таким образом из неравенств (3.59) и (3.60) получаем, что справедливы также следующие оценки погрешности метода итераций:

$$\|z_1^n\|_{L_2(S)} \le \left(\frac{2}{\xi_1} M_1^2 + \xi_1\right)^{1/2} q_1 q^{n-1} |z_2^0|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{3.61}$$

$$\|z_2^n\|_{L_2(S)} \le \left(\frac{2}{l_1-\xi_1} M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)^{1/2} q^n |z_2^0|_{W_2^1(\Omega_2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.62}$$

Установим теперь оценку величины

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS = \int\limits_S \left(z_2^n - z_1^n\right)^2 dS = \|z_2^n - z_1^n\|^2_{L_2(S)}. \tag{3.63}$$

Имеем

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS \leq 2\left(\|z_1^n\|^2_{L_2(S)} + \|z_2^n\|^2_{L_2(S)}\right). \tag{3.64}$$

Принимая во внимание оценки (3.61) и (3.62) и неравенство (3.64) получим

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS \leq 2\left[\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{l_1 - \xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2 |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}\right] =$$
$$= 2\left\{\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{l_1 - \xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2\right\} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}. \tag{3.65}$$

Итак, установлена еще одна оценка

$$\int\limits_S \left[z^n\right]^2 dS = \int\limits_S \left(z_2^n - z_1^n\right)^2 dS = \|z_2^n - z_1^n\|^2_{L_2(S)} \leq$$
$$\leq 2\left\{\left(\frac{2}{\xi_1}M_1^2 + \xi_1\right)\left(q_1 q^{n-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{l_1 - \xi_1}M_2^2 + l_1 - \xi_1\right)\left(q^n\right)^2\right\} |z_2^{(0)}|^2_{W_2^1(\Omega_2)}. \tag{3.66}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

2. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

4. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.

5. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

6. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Доклады РАН*, **349**:5 (1996), 598–602.

7. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.

8. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

9. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

10. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

11. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

12. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

13. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

14. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

15. Киндерлелер Д., Стампаккья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

16. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.

Some iterative processes of solution of elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions with a design estimates of the rate of convergence of iterations

© F. V. Lubyshev[3], M. E. Fairuzov[4]

Abstract. We study the approximate solution of the contact boundary problems for elliptic equations in inhomogeneous anisotropic media with discontinuous coefficients and solution when contacting the internal borders of multilayer media define the conditions of conjugation nonideal contact type. Developed and validated method for solving these classes of problems with discontinuous coefficients and solutions to equations of mathematical physics of elliptic type. Questions of convergence of the iterative process. And the set design of the rate of convergence of iterations (with calculated constants).

Key Words: iteration method, mathematical modeling, elliptic equation, problems for equations of mathematical physics with discontinuous coefficients and solutions, the operator.

[3] full professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.

[4] associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.