УДК 517.9

Асимптотическая эквивалентность дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений

© Е. А. Черноиванова[1]

Аннотация. В данной статье решается проблема классификации дифференциальных уравнений на основе асимптотических свойств решений, кроме того, исследуются дифференциально-функциональные уравнения, для которых уравнениями сравнения являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дифференциально-функциональные уравнения, асимптотические свойства решений

Классификация дифференциальных уравнений на основе асимптотических свойств решений — методологическая основа многих асимптотических методов интегрирования. В негладком анализе такую основу имеют все асимптотические методы. Выбор отношения эквивалентности и уравнения сравнения - главные задачи, решение которых на определенном классе уравнений составляет суть конкретного асимптотического метода. Однако большинство работ (особенно в негладком анализе) по классификациям относится к классам уравнений, которые в качестве фазового пространства имеют множество $D = [T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $T_0 \in \mathbb{R}$.

Если же уравнения определены на подмножествах множества D, то обычные методы выбора уравнения сравнения здесь непригодны. В данной статье решается эта проблема, кроме того, здесь исследуются дифференциально-функциональные уравнения, для которых уравнениями сравнения являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пусть дифференциально-функциональное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, A_t y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $A_t : C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n) \to D_m$, $D_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$,
$f \in C([T_0, +\infty) \times D \times S_c \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$,
$g \in K([T_0, +\infty) \times D, D_m, S_c \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$ — класс функций, измеримых по t и непрерывных по остальным аргументам, D — область, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $S = \{z : z \in R^{m0}, ||z|| \leq C, 0 < C < +\infty\}$, $\varphi \in C^{(1,0,0)}([T_0, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], S_c)$; $\lambda_*(\gamma, \varepsilon) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(t_k, \gamma, \varepsilon)$ для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и всех $\gamma \in \mathbb{R}^n$, при всех $T_0 \leq t < +\infty$, $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существуют ненулевые частные производные $f_y, f_\lambda(\lambda = \varphi(t, y, \varepsilon))$, локально

[1] Доцент кафедры информационных технологий и математики, АНОО ВПО ЦС РФ РУК «Саранский кооперативный институт» (филиал), г. Саранск

удовлетворяющие условию Липшица. При $C = +\infty$, $\lambda_*(\gamma, \varepsilon) = \infty$ будем считать, что $\lim_{k\to+\infty} f(t, y, \varphi(t_k, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, \gamma, \varepsilon)$, $f_1 \in C([T_0, +\infty) \times D \times (0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$, $f(t, y, \lambda_*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) = f_1(t, y, \varepsilon)$, $T_0 \le t < +\infty$, $\gamma, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. Требуется на множестве $T_0 \le \tau \le t < +\infty$ с точностью ε_1 найти решение $y(t) = y(t : \tau, \gamma, \varepsilon)$ уравнения (1.1) при всех достаточно малых ε. Считая функции g, φ в некотором смысле малыми, будем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda_*(\gamma, \varepsilon), \varepsilon) \tag{1.2}$$

рассматривать в качестве уравнения сравнения. В эту схему укладывается классический метод усреднения. Более того, рассматривая для конкретного уравнения различные представления вида 1.1, можно получать различные уравнения сравнения и появляется возможность выбора простейшего из них. Будем считать, что в дальнейшем все выше перечисленные условия для уравнений (1.1) и (1.2) всегда выполняются.

В зависимости от выбора оператора A уравнение (1.1) может быть либо уравнением с запаздывающим аргументом, либо каким-нибудь другим дифференциально-функциональным уравнением. Например, уравнение (1.1) может иметь вид:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, y(t - t_0), \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, y, \int\limits_0^t G(t, s) y(s) ds, \varphi(t, y, \varepsilon), \varepsilon).$$

Будем говорить, что уравнения (1.1) и (1.2) на множестве $\Omega \subseteq D$ асимптотически эквивалентны относительно решений (P), определенных при достаточно малом ε_0 и всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ при $t > \tau$, принадлежащих множеству Ω, если для каждого решения из (P) уравнения (1.1) при достаточно малом ε_0 и при всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, найдется решение из (P) уравнения (1.2) такое, что разность между ними стремится к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной t, и, наоборот: для каждого решения из (P) уравнения (1.2) при достаточно малом ε_0 и всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ найдется решение из (P) уравнения (1.1) такое, что выполняется то же асимптотическое соотношение. В качестве решений (P) уравнений (1.1) и (1.2) будем рассматривать решения $z(t)$, $t \ge \tau$ такие, для которых существуют такие числа $\alpha > 0$, зависящие от решения $z(t)$, что множество $z : ||z - z(t)|| \le \alpha \subset \Omega$ при всех $t \ge \tau$ и всех ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, при достаточно малом ε_0.

К первоначальной задаче добавим задачу об асимптоматической эквивалентности уравнений (1.1) и (1.2) на множестве Ω.

Для решения этих задач понадобится вспомогательное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon),$$

которое определено при значениях параметров, принадлежащих вышеуказанным множествам.

Пусть $x(t) = x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)$ — решение уравнения (1.2), $x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) = \gamma$, $y(t)$ — решение уравнения (1.1), $X_T(t) = x(t : T, y_T(T), \varphi(T, y_T(T), \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (1.2), $y_T(T) = x(T : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon) = x(T, \lambda^*)$, $T \geq \tau \geq T_0$, $x(t : \tau, \gamma, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (3).

Будем говорить, что выполняется условие (A), если:

A_1. Для любой ограниченной функции $y \in C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ оператор $A_t(y)$ непрерывен по $t \in [\tau, +\infty)$;

A_2. Для любого $\varepsilon > 0$, для всех τ_1 существует $\delta = \delta(\varepsilon, \tau_1) > 0$ такое, что как только $z_1, z_2 \in S$, S — подмножество ограниченных вектор-функций из $C([T_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$, $||z_1 - z_2|| < \delta$, неравенство $||A_t z_1 - A_t z_2|| < \varepsilon$ справедливо для всех $t \in [\tau, \tau_1]$.

Будем говорить, что выполняется условие (B), если для произвольных $t_0 \geq \tau$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и для произвольного $x_0 \in \Omega$ решение $x(t : t_0, x_0, \varphi(\tau, \gamma, \varepsilon), \varepsilon)$ существует для всех $t \in [\tau, t_0]$ и имеет значения в D.

Будем говорить, что выполняется условие (C), если для любой непрерывной функции $z(t)$ со значениями в Ω при $t \geq \tau$ $\int\limits_{\tau}^{+\infty} ||H_1(t, s, z(s), \varepsilon)|| ds \leq I(t, \varepsilon)$, $I(t, \varepsilon) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $I(t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по t.

Не умаляя общности, предположим, что $I(t, \varepsilon)$ непрерывная по совокупности t, ε и невозрастающая по каждой из переменных функция.

Теорема 1.5. *При условиях (A), (B), (C) уравнения (1.1) и (1.2) асимптотически эквивалентны на множестве Ω относительно множества решений (P), если для любого решения $x(t) \in (P)$ и любого $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\lim_{T \to +\infty} \sup ||x(t : T, y_T(T), \varphi(T, \gamma, \varepsilon), \varepsilon) - x(t : \tau, \gamma, \lambda^*, \varepsilon)|| = 0.$$

Доказательство теоремы проводится на основании принципов Шаудера и Арцела. Рассматривается множество $D_T = \{z \in S, z(t) \in \Omega : ||z(t) - x_T(t)|| \leq d, \tau \leq t \leq T\}$ и оператор $L : D_T \to S$,

$$Lz(t) = \begin{cases} x_T(t) - \int\limits_t^T H_1(t, s, z(s), \varepsilon) ds, & \tau \leq t \leq T, \\ x_T(t), & t > T, \end{cases}$$

для которого доказывается существование неподвижной точки, то есть

$$Lz(t) = z(t),$$

и $z_T(t)$, $\tau \leq t \leq T$, удовлетворяет уравнению (1.1).

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, изд-во Сарат. ун-та, Саран. Фил., 1990, 224 с.

2. Черноиванова Е. А., "Математические модели электрических цепей с диодами и методы их исследования", *Математическое моделирование*, **7**:5 (1995), 68.

3. Черноиванова Е. А., "Математическая модель для расчета плановых показателей приема в ВУЗ", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 119–122.

Asymptotic Equivalence Of Differential And Differential-Functional Equations.

© **E. A. Chernoivanova**[2]

Abstract. In this article we solve the problem of classification of differential equations on the basis of asymptotic properties of the solutions, in addition, we investigate the differential-functional equations, for which equations are ordinary differential equations.

Key Words: differential equations, differential-functional equations, asymptotic properties of solutions

[2] Associate Professor of information systems and mathematics Autonomous non-profit educational organization of higher professional education of the Russian Central Union «The Russian University of cooperation» Saransk cooperative Institute (branch)