УДК 517.9

О модифицированных многошаговых методах для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса два

© **О. С. Будникова**[1]

Аннотация. В работе предложены многошаговые методы для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса 2. Проведен анализ предложенных алгоритмов первого порядка точности на модельных примерах. Приведено описание общего вида модифицированных $k-$ шаговых методов.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения, индекс, многошаговые методы.

1. Введение

Математические модели различных развивающихся систем включают в себя взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерра I и II рода [1]. Такие задачи можно записать в виде системы интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, их принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ).

Численное решение таких систем стало набирать популярность относительно недавно, первая статья посвященная данной тематике была опубликована в 1987 году Чистяковым В.Ф. [2], с тех пор было опубликовано несколько работ посвященных численному решению, в основном, полуявных ИАУ (см. [3], [4], [5], [6], [7]). В статье [7] впервые были предложены и обоснованы многошаговые методы для численного решения ИАУ индекса один.

Цель данной работы модифицировать ранее предложенные $k-$ шаговые алгоритмы для численного решения линейных ИАУ индекса 2. Преимущества данных алгоритмов проиллюстрированы на известных тестовых примерах.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ 0 \le s \le t \le 1, \tag{2.1}$$

[1] Ассистент кафедры математики и методики обучения математике, Восточно-Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск; osbud@mail.ru.

где $A(t)$ и $K(t,s)$ - $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ n -мерные известная и искомая вектор-функции.

Системы (2.1) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ), если

$$detA(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Всюду в дальнейшем будем подразумевать, что для системы (2.1) выполнено условие (2.2).

Предполагается, что элементы $A(t), K(t,s), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи (2.1) будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$ обращающую (2.1) в тождество.

Характеристикой сложности рассматриваемых задач является понятие индекса.

Определение 2.1. [8]. *Минимальное число l, при котором существует дифференциальный оператор*

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^{l} W_j(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^j,$$

где W_j $-$ $(n \times n)$ матрицы с непрерывными элементами, такой, что

$$\Omega_l \circ (A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds) = \check{A}(t)x(t) + \int\limits_0^t \check{K}(t,s)x(s)ds;$$

здесь $\check{A}(t)$, $\check{K}(t,s)$ - некоторые матрицы с непрерывными элементами, причем

$$det\check{A}(t) \neq 0, \; \forall t \in [0,1]$$

назовем индексом системы (2.1).

Для иллюстрации определения 2.1. приведем пример.

Пример 2.1. [9]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], d \neq 1 - const.$$

При любых $f_1(t) \in C^1$, $f_2(t) \in C^2$ таких, что $f_2(0) = 0, f_1(0) = f_2'(0)$ система имеет единственное решение: $x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - \frac{1}{1-d}(f_1(t) - f_2'(t)) \\ \frac{1}{1-d}(f_1'(t) - f_2''(t)) \end{pmatrix}$.

В качестве оператора Ω_2 *можно взять*

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2.$$

Данный оператор переводит исходное ИАУ в СИУВ II рода

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5(1-d) \\ 1.5 & 0.5(d-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1-0.5d \\ 1 & d(t-s)+1.5d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) + 0.5f_1'(t) - 0.5(f_2'(t) + f_2''(t)) \\ f_2(t) - 0.5f_1'(t) + 1.5f_2'(t) + 0.5f_2''(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

3. Многошаговые методы

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N,\ h = \frac{1}{N}$ и обозначим $A_i = A(t_i), K_{i,j} = K(t_i,t_j), f_i = f(t_i), x_i \approx x(t_i)$.

Для численного решения ИАУ индекса 1, статье [7] предложены и обоснованы k-шаговые методы основанные на явном методе Адамса (см.,например, [13],[14]) для интегрального слагаемого и на экстраполяционной формуле для вычисления x_{i+1} по заранее вычисленным значениям $x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}$.

Данные методы имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}. \tag{3.1}$$

Приведем таблицу коэффициентов α_j для $k = 1, 2, ..., 5$ (см., [7])и значения коэффициентов $\omega_{i+1,l}$ для $k = 1, 2, 3$. (см., [13]):

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	-	-	-	-
2	3	-3	1	-	-	-
3	4	-6	4	-1	-	-
4	5	-10	10	-5	1	-
5	6	-15	20	-15	6	-1

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 & & & & & \\ 55 & 5 & 5 & 55 & & & & \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 & & & \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 & & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 33 & -4 & 55 & \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & 33 & -4 & 55 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Было доказано[7], что методы (3.1) сходится к точному решению с порядком $k+1$, то есть, справедлива оценка

$$||x_i - x(t_i)|| = O(h^{k+1}),\ i = k, k+1, ..., N-1.$$

4. Модифицированные методы

Интегро-алгебраические уравнения индекса два и выше назовем ИАУ высокого индекса. Для таких задач алгоритмы, разработанные для интегро-алгебраических уравнений индекса 1, могут порождать неустойчивые процессы. Для иллюстрации вышесказанного приведем примеры.

П р и м е р 4.1. [11] *Рассмотрим ИАУ индекса 2*

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1].$$

Здесь $d-$ числовой параметр, $d \neq 1$. Данная система имеет точное решение

$$z(t) = \frac{g'(t) - f''(t)}{d-1}, y(t) = f'(t) - tz(t).$$

Теперь для примера 4.1., применяя метод (3.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h\sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность i-ой строки и $(i-1)$-й:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h\begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} - g_i \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - t_i z_i, \ \ dz_i - z_{i-1} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h} - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Для второй компоненты получим следующее характеристическое уравнение:

$$d \cdot p - 1 = 0.$$

Таким образом, метод (3.1) при $-1 \leq d \leq 1$ является неустойчивым.

Из вышеприведенных рассуждений видно, что предлагаемые многошаовые методы могут порождать неустойчивые процессы для ИАУ индекса 2. Но неустойчивости при $-1 \leq d \leq 1$ можно избежать, если модифицирвать предложенные нами методы следующим образом: будем находить по экстраполяционной формуле не только x_{i+1}, а все первое слагаемое $A_{i+1}x_{i+1}$. Получим:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j A_{i-j} x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \ i = k, k+1, \cdots, N-1. \quad (4.1)$$

Проиллюстрируем эффективность такой модификации.

Для данной задачи 4.1. применим (4.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & d-1 \\ 1 & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1} - g_i \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - t_i z_i, \ \ z_i = \frac{1}{(d-1)} \Big(\frac{g_{i+1} - g_i}{h} - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \Big).$$

Сравнивая полученные рекуррентные соотношения с точным решением, видим, что метод сходится к точному решению с первым порядком точности.

Рассмотрим другое интегро-алгебраическое уравнение индекса 2.

П р и м е р 4.2. [12]

$$\begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & as \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1].$$

Здесь $a-$ *числовой параметр, задача имеет единственное решение* $y(t) = f'(t) - atz(t),\ z(t) = -f''(t).$

Для начала применим метод (3.1) при $k = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h\sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - at_i z_i, \quad (a+1)z_i - az_{i-1} = -\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Для второй компонеты получим следующее характеристическое уравнение:

$$(a+1) \cdot p - a = 0.$$

Таким образом, метод (3.1) при $a < -\frac{1}{2}$ является неустойчивым для данного примера.

Теперь применим модифицирванные методы (4.1) при $k = 0,$ получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + h\sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Найдем разность $i-$ой строки и $(i-1)-$й:

$$\begin{pmatrix} 1 & at_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & at_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} +$$

$$+h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & at_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{i+1} - f_i \end{pmatrix}.$$

Опуская несложные выкладки, получим:

$$y_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - at_i z_i, \quad z_i = -\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}.$$

Сравнивая полученные рекуррентные соотношения с точным решением, видим, что предпочтительность данного метода очевидна по сравнению с немодифицированным.

П р и м е р 4.3. [10]

$$\begin{pmatrix} 1 & -at \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} -b & abs \\ 1 & -1-as \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1],$$

где a, b *– числовые параметры. Точное решение* $y(t) = (1+at)e^{bt}$, $z(t) = e^{bt}$.

Данный пример имеет индекс один, так как $rankA(t) = deg(det(\lambda A(t) + K(t,t))) = 1\ \forall t \in [0,1]$. Но при $b \ll 0$ он становится жестким.

Проводя анализ, аналогичный предыдущим случаям, получаем:
для метода (3.1)

$$y_i = (1+at_i)z_i, \quad z_i = \frac{1-ah}{1-ah-bh} z_{i-1};$$

и для (4.1) при $k = 0$

$$y_i = (1+at_i)z_i, \quad z_i = \frac{1}{1-bh} z_{i-1}.$$

Видно, что для устойчивости процесса во втором случае требуется весьма существенное ограничение на шаг, а у модифицированного метода последнее выражение совпадает с неявным методом Эйлера для уравнения Далквиста.

Из-за громоздкости выкладок для случая $k = 1, 2$ приведем только численные расчеты вышерассмотренных примеров.

Обозначения: pog_1, pog_2 – погрешность одно- и двухшагового методов соответственно.

$$pog_k = \max_{0 \le i \le n} ||x(t_i) - x_i||, k = 1, 2.$$

$d = 0$			$d = 0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	$0,038$	10^{-48}	$0,2$	$0,043$	$6 \cdot 10^{-48}$
$0,1$	$0,00836$	0	$0,1$	$0,0084$	0
$0,05$	$0,0021$	0	$0,05$	$0,0021$	0

Таблица 1: результаты расчетов примера 4.1., $g = \frac{t^2}{2}, f = \frac{t^3}{3}$

$a = 0$			$a = 0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	0.0165	10^{-49}	$0,2$	0.0153	10^{-49}
$0,1$	0.00417	10^{-48}	$0,1$	0.00416	10^{-48}
$0,05$	0.00104	0	$0,05$	0.00104	0

Таблица 2: результаты расчетов примера 4.2., $f(t) = \frac{t^3}{6}$

$a = 0, b = 0$			$a = 0.5, b = 0$			$a = 0, b = 0.5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	10^{-50}	10^{-50}	$0,2$	10^{-50}	10^{-50}	$0,2$	0.0184	0.0016
$0,1$	0	0	$0,1$	0	0	$0,1$	0.004946	0.00023
$0,05$	0	0	$0,05$	0	0	$0,05$	0.00128	0.000032

Таблица 3: результаты расчетов примера 4.3.

$a = 0.5, b = 0.5$			$a = 0, b = -5$			$a = 2, b = -5$		
h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2	h	pog_1	pog_2
$0,2$	0.0277	0.0024	$0,2$	0.01694	0.00698	$0,2$	0.0508	0.021
$0,1$	0.0074	0.00035	$0,1$	0.00579	0.00436	$0,1$	0.0174	0.013
$0,05$	0.00192	0.000047	$0,05$	0.00109	0.00287	$0,05$	0.0033	0.00086

Таблица 4: результаты расчетов примера 4.3.

Результаты численных расчетов позволяют надеяться на работоспособность модифицирванных $k-$ шаговых алгоритмов для ИАУ индекса 2.

Автор благодарит Булатова М.В. за постановку задачи.

Работа поддержана грантами РФФИ №11-01-00639а, 13-01-93002-Вьет-а и 14-01-31224 мол_а.

Список литературы

1. В. М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., М., 1983, 350 с.

2. Чистяков В.Ф., “О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах”, *Функции Ляпунова и их применения*, 1987, № 9, Новосибирск: Наука, 231–239.

3. Kauthen, J.P., “The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by pollinomial spline collocation methods”, *Math. Comp.*, 2000, № 236, Новосибирск: Наука, 1503–1514.

4. Brunner, H., *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations*, Unversity Press Cambridge, Cambridge, M., 2004, 350 с.

5. M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin, “Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2”, *Appl. Numer. Math*, **61**:1 (2011), 131–148.

6. S. Pishbin, F. Ghoreishi , M. Hadizadeh, “The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **245**:1 (2013), 121–132.

7. О. С. Будникова, М. В. Булатов, “Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 829–839.

8. M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov, *The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs*, Memorial University of Newfoundland, 1997, 35 с.

9. Булатов, М. В., “О преобразовании вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра”, *Вычислительные технологии*, **5**:4 (2000), 22–30.

10. Kunkel, P., “Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations”, *Electr. Trans. Numer. Analys*, **26**:4 (2007), 85–420.

11. Чистяков, В. Ф., *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996, 350 с.

12. K. F. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numercal solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations*, Appl. Math., Philadelphia, 1996, 350 с.

13. Тен Мен Ян, *Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода*, канд. физ. мат. наук,, Иркутск, 1985, 215 с.

14. Linz, P., *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM, Philadelphia, 1985.

On modified multistep methods for numerical solution of linear integral-algebraic equations which have index two.

© O. S. Budnikova[2]

Abstract. In this paper, we propose multistep methods for numerical solution of linear integral-algebraic equations which have index two. The detailed analysis of such schemes of the first order have been studied using modal examples. A description for the general form of modified k-steps methods has been given.

Key Words: integral-algebraic equations, index, multistep methods.

[2] Assistant of chair of mathematics and training technque of mathematics , East Siberian State Academy of Education, Irkutsk; osbud@mail.ru.