УДК 517.9

Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными

© И. В. Бойков[1], В. А. Рязанцев[2]

Аннотация. Рассматриваются модели реакции-диффузии, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных с дробными производными. Исследуются устойчивость и неустойчивость по Тьюрингу этих систем.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, модели реакции-диффузии, устойчивость по Тьюрингу, логарифмическая норма, дробные производные

1. Введение

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, несмотря на свою более чем вековую историю, продолжает активно развиваться и обогащается новыми направлениями исследований. В последнее время к числу таких направлений добавилась неустойчивость по Тьюрингу. Это обусловлено тем, что открытие А. Тьюрингом при рассмотрении простейшей математической модели морфогенеза диффузионной неустойчивости вызвало огромное количество работ как по исследованию математичсеких моделей реакции-диффузии, приводящих к структурообразованию по Тьюрингу, так и по экспериментальному их моделированию. Укажем на монографии [1], [2], в которых библиография по упомянутому направлению превышает 600 наименований.

Теория морфогенеза Тьюринга объяснила многие явления в химии, биологии, социальных науках и спрогнозировала многие эффекты как в теории нелинейных параболических уравнений, так и в предметных областях.

Новый импульс изучению уравнений вида "реакция-диффузия"дали работы И. Р. Пригожина и его школы. Были исследованы процессы образования бифуркаций в реакционно-диффузионной модели химической среды – "брюсселяторе"[3]. При этом сконструированная Лефевром и Пригожиным модель оказалась более общей, нежели модель Тьюринга, и сняла ряд возражений со стороны химиков и биологов к модели диффузии Тьюринга.

В результате этих работ образовалось новое направление исследований – синергетика, оказавшее значительное влияние на развитие математики в конце XX столетия.

Формально подход Тьюринга заключается в возмущении исходной однородной по отношению к пространственным переменным системы дифференциальных уравнений диссипативными слагаемыми.

Определение 1.1. [4] *Однородное по переменной x решение $u^*(t,x) = \left(u_1^*(t,x), u_2^*(t,x)\right)^T$ системы уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + g_1(t,u_1,u_2), \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + g_2(t,u_1,u_2), \end{cases} \qquad (1.1)$$

[1] Заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; boikov@pnzgu.ru.

[2] Аспирант кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru.

при не зависящих от пространственных координат начальных значениях

$$u_k^*(t_0,x)=u_{0k},\quad u_{0k}=\mathrm{const},\quad k=1,2, \tag{1.2}$$

определенное в области $\Omega:\{(t,x):(t_0,\infty)\times(-\infty,\infty)\}$, *устойчиво по Тьюрингу, если для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся такие* $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ *и* $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$, *что при выполнении неравенств* $|\delta_{jk}|\le\delta_1$, $j,k=1,2$ *решение* $u(t,x)=\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)^T$ *задачи Коши*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}=a_{11}(t)u_1+a_{12}(t)u_2+g_1(t,u_1,u_2)+\delta_{11}\dfrac{\partial^\nu u_1(t,x)}{\partial x^\nu}+\delta_{12}\dfrac{\partial^\nu u_2(t,x)}{\partial x^\nu},\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}=a_{21}(t)u_1+a_{22}(t)u_2+g_2(t,u_1,u_2)+\delta_{21}\dfrac{\partial^\nu u_1(t,x)}{\partial x^\nu}+\delta_{22}\dfrac{\partial^\nu u_2(t,x)}{\partial x^\nu},\end{cases} \tag{1.3}$$

$$u_k(t_0,x)=u_{0k}+\widetilde{u}_{0k}(x),\quad |\widetilde{u}_{0k}(x)|\le\delta_2, \tag{1.4}$$

$k=1,2$, $-\infty<x<\infty$, *удовлетворяет неравенству* $\sup\limits_{t_0\le t<\infty,\,-\infty<x<\infty}|u_k(t,x)-u_k^*(t,x)|\le\varepsilon$. *В противном случае решение* $u^*(t,x)$ *системы* (1.1) *неустойчиво по Тьюрингу.*

Замечание 1.1. *В слагаемых* $\delta_{jk}\dfrac{\partial^\nu u_k(t,x)}{\partial x^\nu}$, $j,k=1,2$ *в правых частях уравнений системы* (1.3) *под* $\dfrac{\partial^\nu u_k(t,x)}{\partial x^\nu}$ *следует понимать производную дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля, определяемую формулой* [5]

$$\frac{\partial^\nu u_k(t,x)}{\partial x^\nu}={}_{-\infty}\mathsf{D}_x^\nu u_k=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u_k(t,\xi)}{(x-\xi)^{\nu+1-n}}\,d\xi,$$

где n *есть число, на единицу большее целой части исходного порядка* $\nu>0$ *рассматриваемой дробной производной:* $n=\lceil\nu\rceil$.

Замечание 1.2. *При исследовании устойчивости по Тьюрингу решения системы* (1.1), *как правило, предполагается устойчивость в смысле Ляпунова решения исходной системы* (1.1) *к возмущению начальных условий.*

В работе исследуется устойчивость по Тьюрингу решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, медленно изменяющимися во времени. Рассмотрен случай, когда в качестве диссипативных слагаемых берутся дифференциальные операторы с производными дробного порядка по пространственной переменной. Метод исследования заключается в переходе на основе интегральных преобразований к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром и исследовании устойчивости решений этой системы.

2. Устойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка

Для исследования устойчивости по Тьюрингу однородного по переменной x решения $u^*(t,x)$ задачи (1.1)-(1.2) введем новую неизвестную вектор-функцию $v(t,x)$ по формуле

$$v(t,x)=u(t,x)-u^*(t,x), \tag{2.1}$$

где $v(t,x)=\big(v_1(t,x),v_2(t,x)\big)^T$, а $u(t,x)$ – решение задачи Коши (1.3)-(1.4).

Используя выражение (2.1), получаем, что вектор-функция $v(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2 + h_1(t,v_1,v_2) + \delta_{11}\dfrac{\partial^\nu v_1}{\partial x^\nu} + \delta_{12}\dfrac{\partial^\nu v_2}{\partial x^\nu}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = a_{21}(t)v_1 + a_{22}(t)v_2 + h_2(t,v_1,v_2) + \delta_{21}\dfrac{\partial^\nu v_1}{\partial x^\nu} + \delta_{22}\dfrac{\partial^\nu v_2}{\partial x^\nu}, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$v_1(t_0,x) = v_{01}(x), \quad v_2(t_0,x) = v_{02}(x), \tag{2.3}$$

где $v_{01}(x) = \widetilde{u}_{01}(x)$ и $v_{02}(x) = \widetilde{u}_{02}(x)$, а функции $h_1(t,v_1,v_2)$, $h_2(t,v_1,v_2)$ получены из функций $g_1(t,u_1,u_2)$, $g_2(t,u_1,u_2)$ сооответственно при переходе к новым неизвестным функциям $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$.

В предположении, что функции $v_{01}(x)$, $v_{02}(x)$ суммируемы с квадратом по переменной x, применим к задаче (2.2)-(2.3) преобразование Фурье по пространственной переменной, учитывая [5], что $F\big({}_{-\infty}\mathsf{D}_x^\nu v(t,x)\big) = \big(-i\omega\big)^\nu V(t,\omega)$. В результате получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с параметром:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = \big[a_{11}(t) + \delta_{11}\big(-i\omega\big)^\nu\big]V_1 + \big[a_{12}(t) + \delta_{12}\big(-i\omega\big)^\nu\big]V_2 + H_1(t,\omega), \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} = \big[a_{21}(t) + \delta_{21}\big(-i\omega\big)^\nu\big]V_1 + \big[a_{22}(t) + \delta_{22}\big(-i\omega\big)^\nu\big]V_2 + H_2(t,\omega), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$V_1(t_0,\omega) = V_{01}(\omega), \quad V_2(t_0,\omega) = V_{02}(\omega), \tag{2.5}$$

Введем замену неизвестных функций $V_1(t,\omega)$, $V_2(t,\omega)$ по формулам

$$V_1(t,\omega) = P_1(t,\omega) + iP_2(t,\omega), \quad V_2(t,\omega) = P_3(t,\omega) + iP_4(t,\omega).$$

Имеет место следующее представление [6]:

$$(-i\omega)^\nu = |\omega|^\nu \cdot \big(\cos(\pi\nu/2) - i\sin(\pi\nu/2)\mathrm{sgn}(\omega)\big). \tag{2.6}$$

Используя (2.6), из системы (2.4) получаем систему для неизвестной вектор-функции $P(t,\omega) = \big(P_1(t,\omega), P_2(t,\omega), P_3(t,\omega), P_4(t,\omega)\big)^T$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Psi(t,\omega)P + R(t,\omega), \tag{2.7}$$

где $R(t,\omega) = \big(R_1(t,\omega), R_2(t,\omega), R_3(t,\omega), R_4(t,\omega)\big)^T$, $\Psi(t,\omega) = \big\{\Psi_{jk}(t,\omega)\big\}$, $j,k = 1,2$,

$$\Psi_{jk}(t,\omega) = \begin{pmatrix} a_{jk}(t) + \delta_{jk}|\omega|^\nu\cos(\pi\nu/2) & \delta_{jk}|\omega|^\nu\mathrm{sgn}(\omega)\sin(\pi\nu/2) \\ -\delta_{jk}|\omega|^\nu\mathrm{sgn}(\omega)\sin(\pi\nu/2) & a_{jk}(t) + \delta_{jk}|\omega|^\nu\cos(\pi\nu/2) \end{pmatrix},$$

а функции $R_k(t,\omega)$, $k = \overline{1,4}$ определяются из выражений

$$H_1(t,\omega) = R_1(t,\omega) + iR_2(t,\omega), \quad H_2(t,\omega) = R_3(t,\omega) + iR_4(t,\omega).$$

Вектор-функцию $P(t,\omega)$ будем рассматривать в пространстве вектор-функций $\big(P_1(t,\omega), P_2(t,\omega), P_3(t,\omega), P_4(t,\omega)\big)^T$ с нормами

$$\|P(t,\omega)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{4}\big|P_k(t,\omega)\big|^2}, \quad \|P(t,\omega)\|_1 = \max_{k=\overline{1,4}}\big[\big|P_k(t,\omega)\big|\big],$$

$$\|P(t,\omega)\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|P_k(t,\omega)\right|^2 d\omega\right)\right]^{1/2}.$$

Нормы $\|P(t,\omega)\|$ и $\|P(t,\omega)\|_1$ связаны следующим двусторонним неравенством [6]:

$$\frac{1}{2}\|P(t,\omega)\| \le \|P(t,\omega)\|_1 \le \|P(t,\omega)\|. \tag{2.8}$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1) логарифмическая норма $\Lambda\big(\Psi(t,\omega)\big)$ *, вычисляемая по формуле*

$$\Lambda\big(\Psi(t,\omega)\big) = \sup_{j=\overline{1,4}}\left[\mathrm{Re}\big[\psi_{jj}(t,\omega)\big] + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{4}\big|\psi_{jk}(t,\omega)\big|\right]. \tag{2.9}$$

на множестве значений $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [t_0,\infty)$ *ограничена сверху числом* $-\gamma$ *,* $\gamma > 0$ *;*

2) функции $h_1\big(t,v_1,v_2\big)$ *,* $h_2\big(t,v_1,v_2\big)$ *непрерывны по всем переменным;*

3) вектор-функция $h(t,v) = \big(h_1(t,v),h_2(t,v)\big)^T$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|h(t,v)\|_2 \le \beta\|v\|_2; \tag{2.10}$$

4) функции $a_{jk}(t)$ *,* $j,k=1,2$ *непрерывны при* $t \ge t_0$ *, причем их значения принадлежат интервалу* $\big(a_{jk}(T)-\varepsilon_{jk},\, a_{jk}(T)+\varepsilon_{jk}\big)$ *,* $\varepsilon_{jk} \ge 0$ *при* $T \le t \le T+\theta$ *, где* $T \ge t_0$ *– любое, а значения* θ *и* ε_{jk} *определяются из неравенства*

$$2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)\theta} \le 1-\alpha, \quad \varepsilon = \max_{j,k}\varepsilon_{jk},$$

где $0<\alpha<1$ *–фиксированное число, не зависящее от* T *;*

5) постоянные β *и* γ *связаны неравенством*

$$\beta+\varepsilon < \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}. \tag{2.11}$$

Тогда решение $u^*(t)$ *задачи* (1.1)-(1.2) *устойчиво по Тьюрингу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменим операторное уравнение (2.7) следующим уравнением:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Psi(T,\omega)P + R_\varepsilon(t,\omega), \tag{2.12}$$

где $R_\varepsilon(t,\omega) = \big[\Psi(t,\omega)-\Psi(T,\omega)\big] + R(t,\omega)$.

Решение операторного уравнения (2.12) при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ и при значениях t, удовлетворяющих неравенству $t_0 \le T < t$, можно представить в виде [7]:

$$P(t,\omega) = e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega) + \int_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon\big(s,\omega\big)\,ds. \tag{2.13}$$

В силу очевидного неравенства $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$, где a, b – произвольные вещественные числа, имеем оценку

$$\|P(t,\omega)\|^2 \le 2\big\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\big\|^2 + 2\left\|\int_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\|^2. \tag{2.14}$$

Применяя двустороннее неравенство (2.8) и используя первое условие доказываемой теоремы, получаем оценку сверху для первого слагаемого в правой части неравенства (2.14).

$$2\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\|^2 \le 8\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\|_1^2 \le \\ \le 8\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}\right\|_1^2 \cdot \left\|P(T,\omega)\right\|_1^2 \le 8\left\|e^{\Lambda(\Psi(T,\omega))(t-T)}\right\|_1^2 \cdot \left\|P(T,\omega)\right\|_1^2 \le \\ \le 8e^{-2\gamma(t-T)}\left\|P(T,\omega)\right\|_1^2 \le 8e^{-\gamma(t-T)}\left\|P(T,\omega)\right\|^2.$$

Интегрирование последнего неравенства дает:

$$2\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\|_2^2 \le 8e^{-\gamma(t-T)}\left\|P(T,\omega)\right\|_2^2. \tag{2.15}$$

Аналогично, для второго слагаемого в правой части (2.14) имеем:

$$2\left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon\bigl(s,\omega\bigr)\,ds\right\|^2 \le 8\left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon\bigl(s,\omega\bigr)\,ds\right\|_1^2 \le \\ \le 8\left(\int\limits_T^t \left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}\right\|_1 \cdot \left\|R_\varepsilon\bigl(s,\omega\bigr)\right\|_1\,ds\right)^2 \le \\ \le 8\left(\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\left\|R_\varepsilon\bigl(s,\omega\bigr)\right\|\,ds\right)^2. \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $h_\varepsilon(t,x)$ по формуле

$$h_\varepsilon(t,x) = \begin{pmatrix} \bigl[a_{11}(t) - a_{11}(T)\bigr]v_1 + \bigl[a_{11}(t) - a_{11}(T)\bigr]v_2 + h_1(t,v_1,v_2) \\ \bigl[a_{11}(t) - a_{11}(T)\bigr]v_1 + \bigl[a_{11}(t) - a_{11}(T)\bigr]v_2 + h_1(t,v_1,v_2) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введем вектор-функцию $H_\varepsilon(t,\omega)$, представляющую собой Фурье-трансформанту функции $h_\varepsilon(t,v_1,v_2)$. Справедливы следующие очевидные равенства:

$$\|P(t,\omega)\|_2 = \|V(t,\omega)\|_2, \quad \|H_\varepsilon(t,v)\|_2 = \|R_\varepsilon(t,\omega)\|_2. \tag{2.17}$$

В силу формулы Планшереля имеет место равенство

$$\left\|h_\varepsilon(t,v_1,v_2)\right\|_2 = \left\|H_\varepsilon(t,\omega)\right\|_2. \tag{2.18}$$

Тогда из структуры вектор-функции $h_\varepsilon(t,v)$, а также из условий 2-4 теоремы следует справедливость при $T \le t \le T+\theta$ следующего неравенства:

$$\left\|h_\varepsilon(t,v)\right\|_2 \le (\beta+\varepsilon)\|v\|_2. \tag{2.19}$$

Интегрируя неравенство (2.16) по переменной ω и применяя неравенство Коши-Буняковского, а также формулу Планшереля и неравенство (2.19), имеем:

$$2\left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\|_2^2 \le 8\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_T^t e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}e^{-\frac{\gamma}{2}(t-s)}\left\|R_\varepsilon(s,\omega)\right\|\,ds\right)^2 d\omega \le \\ \le 8\left(\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\,ds\right)\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|R_\varepsilon(s,\omega)\|_2^2\,ds \le$$

$$\leq \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\left[1-e^{-\gamma(t-T)}\right]\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|P(s,\omega)\|_2^2\,ds \leq$$

$$\leq \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|P(s,\omega)\|_2^2\,ds. \quad (2.20)$$

Наконец, интегрирование оценки (2.14) по переменной ω и использование неравенств (2.15) и (2.20) дает:

$$\|P(t,\omega)\|_2^2 \leq 8e^{-\gamma(t-T)}\big\|P(T,\omega)\big\|_2^2 + \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\int\limits_T^t e^{-\gamma(t-s)}\|P(s,\omega)\|_2^2\,ds. \quad (2.21)$$

Пусть $\varphi(\tau)=e^{-\gamma(t-\tau)}\big\|P(\tau,\omega)\big\|_2^2$, тогда неравенство (2.21) может быть записано в виде:

$$\varphi(t) = 8\varphi(T) + \frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\int\limits_T^t \varphi(s)\,ds.$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получаем неравенство $\varphi(t) \leq 8e^{\frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}(t-T)}\varphi(T)$, откуда, возвращаясь к исходным обозначениям, имеем:

$$\|P(t,\omega)\|_2^2 \leq 8e^{\left(-\gamma+\frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)}\|P(T,\omega)\|_2^2. \quad (2.22)$$

В силу первого равенства (2.17) из неравенства (2.22) следует оценка

$$\|V(t,\omega)\|_2^2 \leq 8e^{\left(-\gamma+\frac{8(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)}\|V(T,\omega)\|_2^2,$$

из которой, используя формулу Планшереля и извлекая квадратный корень, имеем окончательно:

$$\|v(t,x)\|_2 \leq 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-T)}\|v(T,x)\|_2. \quad (2.23)$$

Из условия 4 вытекает, что в интервале $\big(t_0,\infty\big)$ существует множество точек $t_k = t_0+k\theta$, в которых выполняется равенство $\|v(t_k,x)\|_2 \leq (1-\alpha)^k\big\|v(t_0,x)\big\|_2$. Стало быть, $\lim\limits_{k\to\infty}\big\|v(t_k,x)\big\|_2 = 0$. Поскольку всякий сегмент $\big[t_k,t_{k+1}\big]$ имеет длину θ, то при $t_k\leq t\leq t_{k+1}$ справедливо неравенство

$$\|v(t,x)\|_2 \leq 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{4(\beta+\varepsilon)^2}{\gamma}\right)(t-t_k)}\|v(t_k,x)\|_2 \leq 2\sqrt{2}\|v(t_k,x)\|_2.$$

Тем самым, $\lim\limits_{t\to\infty}\|v(t,x)\|_2 = 0$. Асимптотическая устойчивость решения системы (2.2) доказана. Стало быть, решение $u^*(t,x)$ системы (1.1) устойчиво по Тьюрингу.
Доказательство закончено.

Замечание 2.1. *Рассматриваемый в настоящей статье случай системы из двух уравнений, зависящих от одной пространственной переменной, выбран из соображений простоты. Теорема 2.1. вместе с доказательством практически без изменений переносится на общий случай систем из m уравнений с n пространственными переменными, где m и n – произвольные целые положительные числа.*

3. Неустойчивость по Тьюрингу решений систем нелинейных уравнений с производными дробного порядка

Теперь, используя изложенный ранее подход, выведем условия, при которых имеет место неустойчивость по Тьюрингу фиксированного решения $u^*(t,x)$ задачи (1.1)-(1.2).

Решение операторного уравнения (2.12) дается выражением (2.13). Оценим это решение снизу, воспользовавшись известным неравенством $\|x+y\| \geq \big|\|x\|-\|y\|\big|$. При каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\|P(t,\omega)\| \geq \left|\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\| - \left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\|\right|. \tag{3.1}$$

Предположим, что $\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\| \geq \left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\|$; этого всегда можно добиться, если рассматривать оценку (3.1) на достаточно малом промежутке $t \in \big[T,\, T+\Delta t\big]$. Тогда оценку (3.1) можно переписать следующим образом:

$$\|P(t,\omega)\| \geq \left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\| - \left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)}R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\|. \tag{3.2}$$

В правой части (3.2) оценим вычитаемое сверху, а уменьшаемое снизу. Известно, что тождество $e^Ae^B = e^{A+B}$ имеет место, если матрицы A и B коммутируют [7]. Поэтому при всех $\omega \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)} = e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)}e^{\Psi(\omega)(t-T)} = e^{(\Psi(T,\omega)-\Psi(T,\omega))(t-T)} = I,$$

где I – единичная матрица. Следовательно, оператор $e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)}$ является обратным к оператору $e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}$. Для оператора $e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)}$ имеет место оценка $\left\|e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)}\right\| \leq e^{\Lambda(-\Psi(T,\omega))(t-T)}$. Пусть логарифмическая норма $\Lambda\big(-\Psi(t,\omega)\big)$ матрицы $-\Psi(t,\omega)$ при всех значениях $t \geq t_0$, $\omega \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\Lambda\big(-\Psi(t,\omega)\big) \leq -\gamma, \quad \gamma > 0. \tag{3.3}$$

Тогда в силу существования у оператора $e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}$ непрерывного обратного оператора $e^{-\Psi(T,\omega)(t-T)}$ при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ имеем [8] неравенство

$$\begin{aligned}\left\|e^{\Psi(T,\omega)(t-T)}P(T,\omega)\right\| \geq \left\|e^{\Lambda(-\Psi(T,\omega))(t-T)}\right\|^{-1}\cdot\left\|P(T,\omega)\right\| \geq \\ \geq e^{-\Lambda(-\Psi(T,\omega))(t-T)}\left\|P(T,\omega)\right\| \geq e^{\gamma(t-T)}\left\|P(T,\omega)\right\|.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Теперь оценим вычитаемое из правой части неравенства (3.2) сверху. Пусть при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|R(t,\omega)\| \leq \beta(\omega)\|P(t,\omega)\|, \tag{3.5}$$

где $\beta(\omega)$ – определенная при всех $\omega \in \mathbb{R}$ ограниченная функция.

Замечание 3.1. *В частности, можно положить* $\beta(\omega) = \beta = \mathrm{const}$. *Тогда в силу формул* (2.17)-(2.18) *и формулы Планшереля условие* (3.5) *можно заменить условием* (2.10).

Пусть функции $a_{jk}(t)$, $j,k=1,2$, непрерывны при $t \geq t_0$. Тогда нетрудно убедиться, что из (3.5) следует неравенство $\|R_\varepsilon(t,\omega)\| \leq \big[\beta(\omega)+\varepsilon\big]\|P(t,\omega)\|$, где величина ε может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора промежутка Δt изменения t, $T \leq t \leq T+\Delta t$.

Рассуждая по аналогии с выводом оценки (2.20), получаем:

$$\left\|\int\limits_T^t e^{\Psi(T,\omega)(t-s)} R_\varepsilon(s,\omega)\,ds\right\| \leq 2\int\limits_T^t e^{\Lambda(\Psi(T,\omega))(t-s)}\|R_\varepsilon(s,\omega)\|\,ds \leq$$

$$\leq 2\left[\int\limits_T^t e^{2\Lambda(\Psi(T,\omega))}\,ds\right]^{1/2}\cdot\left[\int\limits_T^t \|R_\varepsilon(s,\omega)\|^2\,ds\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\big[\beta(\omega)+\varepsilon\big]\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\omega))(t-T)}-1}{\Lambda(\Psi(T,\omega))}}\left[\int\limits_T^t \|P(s,\omega)\|^2\,ds\right]^{1/2} \tag{3.6}$$

Таким образом, для нормы $\|V(t,\omega)\|$ при $t\in[T,T+\Delta t]$ имеет место оценка сверху:

$$\|P(t,\omega)\| \geq e^{\gamma(t-T)}\big\|P(T,\omega)\big\| - \sqrt{2}\big[\beta(\omega)+\varepsilon\big]\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\omega))(t-T)}-1}{\Lambda(\Psi(T,\omega))}}\left[\int\limits_T^t \|P(s,\omega)\|^2\,ds\right]^{1/2}. \tag{3.7}$$

Покажем, что функция $\|P(t,\omega)\|$ при всяком фиксированном $\omega\in\mathbb{R}$ является возрастающей. Предположим противное: пусть на промежутке $t\in[T,\,T+\Delta t]$ при некотором $\omega=\widetilde{\omega}$ имеет место неравенство $\|P(t,\omega)\| \leq \|P(T,\omega)\|$. Тогда на этом промежутке интеграл $\int\limits_T^t \|P(s,\omega)\|^2\,ds$ оценим сверху при помощи формулы левых прямоугольников:

$$\int\limits_T^t \|P(s,\omega)\|^2\,ds \leq (t-T)\|P(T,\omega)\|.$$

Тогда в предположении, что $\Lambda\big(\Psi(t,\omega)\big)\neq 0$ при всех $t\geq t_0$, $\omega\in\mathbb{R}$, неравенство (3.7) запишется следующим образом:

$$\|P(t,\widetilde{\omega})\| \geq \sigma(\widetilde{\omega},t)\|P(T,\widetilde{\omega})\|. \tag{3.8}$$

где $\sigma(\widetilde{\omega},t)=e^{\gamma(t-T)}-\sqrt{2}\big[\beta(\widetilde{\omega})+\varepsilon\big]\sqrt{\dfrac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))(t-T)}-1}{\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))}}\sqrt{t-T}$.

Найдем производную функцию $\sigma(\widetilde{\omega},t)$ по переменной t:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\gamma e^{\gamma(t-T)}-\sqrt{2}\big[\beta(\widetilde{\omega})+\varepsilon\big]\left[\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))(t-T)}\sqrt{t-T}}{\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))(t-T)}-1}{\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))}}}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{e^{2\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))(t-T)}-1}{\Lambda(\Psi(T,\widetilde{\omega}))}}}{\sqrt{t-T}}\right].$$

Вычислим значение производной $\dfrac{\partial\sigma}{\partial t}$ при $t\to T$:

$$\lim_{t\to T}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\gamma-2\big[\beta(\widetilde{\omega})+\varepsilon\big].$$

Пусть при всех $\omega \in \mathbb{R}$ имеет место условие

$$\gamma \geq 2\beta(\omega) + \alpha, \tag{3.9}$$

где $\alpha > 0$ – фиксированное число.

Тогда при всяком фиксированном $\omega = \widetilde{\omega}$ выполняется неравенство $\lim\limits_{t \to T} \sigma(\widetilde{\omega}, t) \geq 1$, и, кроме того, существует промежуток времени $[T, T + \Delta t(T)$, на котором функция $\sigma(\widetilde{\omega}, t)$ возрастает. Стало быть, для всякого $T \geq t_0$ можно указать такое значение $\Delta t(T)$, что при $t \in (T, T + \Delta t(T)]$ функция $\sigma(t, \widetilde{\omega})$ будет строго возрастающей и большей 1. Следовательно, на промежутке $t \in [T, T + \Delta t(T)]$ функция $\sigma(t, \widetilde{\omega})$ достигает своего минимального значения в момент времени $t = T$. Но тогда в силу (3.8) имеем $\|P(t, \widetilde{\omega})\| \geq \|P(T, \widetilde{\omega})\|$. Таким образом, имеем противоречие с первоначально сделанным предположением $\|P(t, \widetilde{\omega})\| < \|P(T, \widetilde{\omega})\|$, откуда следует, что для всякого фиксированного $T \geq t_0$ можно указать такой интервал $t \in [T, T + \Delta t(T)]$, на котором функция $\|P(t, \widetilde{\omega})\|$ будет возрастающей. В силу произвольности $\widetilde{\omega}$ для всякого фиксированного $\omega \in \mathbb{R}$ получаем неравенство $\|P(t, \omega)\| > \|P(T, \omega)\|$, где $T < t < T + \Delta t(T)$. Тогда в силу первого равенства (2.17) имеем окончательно:

$$\|V(t, \omega)\| > \|V(T, \omega)\|, \quad T < t < T + \Delta t(T). \tag{3.10}$$

Для доказательства неустойчивости решения нужно показать, что $\|V(t, \omega)\|$ возрастает с возрастанием величины t. Выше было показано, что для каждого T, $T \geq t_0$, существует промежуток времени $(T, T + \Delta t(T)]$, в течение которого функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает. Более того, можно выбрать такой промежуток времени $[T, T + \Delta t(T)]$, что

$$\|V(T + \Delta t(T), \omega)\| \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \|V(T, \omega)\|.$$

Возьмем последовательность $t_0 = T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ такую, что при $t \in \big(T_k, T_{k+1}\big]$ функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает. Здесь имеется две возможности: 1) $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = \infty$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = T_*$. В первом случае очевидно, что $\lim\limits_{n \to \infty} \big\|V(T_n, \omega)\big\| = \infty$. Во втором случае функция $\|V(t, \omega)\|$ возрастает при $t \in \big[t_0, T_*\big)$. Так как функция $\|V(t, \omega)\|$ непрерывна, то существует предел $\lim\limits_{t \to T_*} \|V(t, \omega)\| = \|V(T_*, \omega)\|$, причем $\|V(T_*, \omega)\| \geq \sup\limits_{t \in [t_0, T_*)} \|V(t, \omega)\|$. Здесь возможны такие два случая: а) $\big\|V(T_*, \omega)\big\| = \infty$; б) $\big\|V(T_*, \omega)\big\| = A(\omega) < \infty$. Случай а) очевиден. Рассмотрим случай б). Предположим, что в точке T_* предположение о возрастании функции $\|V(t, \omega)\|$ нарушается. Тогда, взяв T_* за начальную точку и повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что это предположение неверно. Аналогично, если в какой-нибудь точке T_{**} условие возрастания $\|V(t, \omega)\|$ нарушается, то взяв ее за начальную, приходим к противоречию. Таким образом, $\|V(t, \omega)\|$ при возрастании t стремится к бесконечности. Тем самым, доказана следующая теоерема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия:*

1) логарифмическая норма $\Lambda\big(-\Psi(t, \omega)\big)$ *матрицы* $-\Psi(t, \omega)$, *вычисляемая по формуле* (2.9), *при всех* $t \geq t_0$ *и* $\omega \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет неравенству* (3.3);

2) вектор-функция $h(t, v)$ *непрерывна по обеим переменным и удовлетворяет условию* (2.10);

3) функции $a_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, *непрерывны при* $t \geq t_0$;

4) константы β *и* γ *связаны неравенством* $\gamma \geq 2\beta + \alpha$, *где* $\alpha > 0$.

Тогда решение $u^*(t, x)$ *системы уравнений* (1.1) *неустойчиво по Тьюрингу.*

Список литературы

1. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Введение в синергетику*, Наука, М., 1990, 272 с.

2. Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский, *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992, 544 с.

3. Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах*, Мир, М., 1979, 512 с.

4. И. В. Бойков, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Изд-во ПГУ, Пенза, 2008, 244 с.

5. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с.

6. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев, "Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными", *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2012, № 4(24), 84-100.

7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.

8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с.

Turing instability of dynamical systems which are described by equations with fractional derivatives

© I. V. Boikov[3] V. A. Ryazantsev[4]

Abstract. Reaction-diffusion models, that are decribed by systems of partial differential equations, are under consideration. Turnig stability and instability of solutions of these systems are investigated in the paper.

Key Words: partial differential equations, reaction-diffusion models, Turing stability, logarithmic norm, fractional derivatives

[3] Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; boikov@pnzgu.ru

[4] Post-graduate student of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; ryazantsevv@mail.ru