УДК 517.929

Совместные системы дифференциальных уравнений

© **Л. Д. Блистанова[1], В. И. Зубов[2], И. В. Зубов[3], С. А. Стрекопытов[4], М. В. Стрекопытова[5]**

Аннотация. В статье излагаются методы исследования систем с распределенными параметрами, к которым приводят задачи обнаружения предельных режимов, а также развиваются методы качественного анализа процессов управления, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными

Ключевые слова: соотношения, оператор, функция, система, решение, аргумент, производная, уравнение, факт

1. Введение

Интуитивно очевидно, что системы с простой структурой легче реализуются в инженерном смысле. Конечно, понятие простоты весьма относительно, но, скажем, квадратичные системы вызовут предпочтение у любого конструктора перед системами, включающими более сложные нелинейности. Рассмотрение нелинейных систем с простой структурой, имеющих несколько неустойчивых положений равновесия, но имеющих заданным образом геометрически локализованное ограниченное инвариантное множество, к тому же глобально асимптотически устойчивое, позволяет создавать весьма эффективные системы управления. По сути это предельное множество является аналогом устойчивого положения равновесия для линейных и линеаризованных систем. Но в данном случае алгебраические критерии устойчивости, основанные на анализе собственных чисел матрицы линейного приближения, беспомощны. Это связано с тем, что аналитическая природа этих предельных множеств, как правило, весьма сложна. Для составления возмущенной системы требуется интегрирование уравнений движения, что в общем случае неосуществимо.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_x &= f(x,y,u), \\ u_y &= g(x,y,u). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть правые части представляют собой непрерывные или даже непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Ясно, что эта система имеет решение не всегда, так как неизвестная функция u одна, а уравнения два. Установим условия, при которых эта система является совместной. Причем будем искать эти условия в виде некоторого соотношения, связывающего функции f, g и их производные. Пусть функция u - решение системы (2.1). Тогда справедливо тождество

$$\frac{\partial(u_x - f)}{\partial y} = \frac{\partial(u_y - g)}{\partial x},$$

[1] Профессор кафедпы Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.
[2] Аспирант кафедры Теории управления ф-та ПМ-ПУ СПбГУ; ddemidova@mail.ru.
[3] Профессор кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.
[4] Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.
[5] Доцент кафедры Теории управления, СПбГУ; ddemidova@mail.ru.

откуда по свойству непрерывно дифференцируемой функции, учитывая тождество $u_{xy} = u_{yx}$, которое выполняется в силу сделанных предположений, имеем

$$f_y + f_u g = g_x + g_u f. \tag{2.2}$$

Выражение (2.2) называется *условием интегрируемости*, а выражение $f_y - f_u g - g_x - g_u f$ - *скобками Якоби*. Если функции, стоящие в правой части системы (2.1), не зависят от искомой функции u, то условие интегрируемости принимает вид

$$f_y = g_x. \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь однородную систему

$$\begin{aligned} Au_x + Bu_y &= 0, \\ Cu_x + Du_y &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ясно, что для совместности этой системы, во-первых, требуется алгебраическая разрешимость уравнений (2.4), т.е. выполнение соотношения $AD = BC$. Дополнительное требование установим аналогичным с (2.2) образом. Пусть u - решение. Тогда выполнено соотношение

$$A\frac{\partial(Cu_x + Du_y)}{\partial x} + B\frac{\partial(Cu_x + Du_y)}{\partial y} = C\frac{\partial(Au_x + Bu_y)}{\partial x} + D\frac{\partial(Au_x + Bu_y)}{\partial y},$$

Откуда с учетом равенства смешанных производных $u_{xy} = u_{yx}$, получаем

$$A(C_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) = C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y). \tag{2.5}$$

Для совместности системы (2.4) необходима алгебраическая совместность уравнения (2.5) и уравнений (2.4). Иначе говоря, уравнение (2.5) должно быть следствием уравнений (2.4). Приводя подобные члены, получаем, что необходимо выполнение соотношения

$$-B(AC_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) - C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y) \tag{2.6}$$

которое наряду с соотношением $AD = BC$ и является искомым условием совместности системы уравнений (2.4).

Выражение

$$A(C_x u_x + D_x u_y) + B(C_y u_x + D_y u_y) - C(A_x u_x + B_x u_y) + D(A_y u_x + B_y u_y)$$

называется *скобкой Пуассона* системы (2.4). Именно С.Д. Пуассон (1781-1840) первым заметил, что при подобных преобразованиях члены, содержащие вторые производные неизвестной функции, сокращаются. Это явилось весьма неожиданным и важным фактом.

В случае систем уравнений большего порядка явные соотношения выписывать достаточно затруднительно, поэтому изложим вопрос в более общем виде.

Рассмотрим систему уравнений

$$L_1(u) = 0,\ L_2(u) = 0. \tag{2.7}$$

Здесь и далее L_i - линейный дифференциальный оператор

$$L_i(u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j},$$

коэффициенты a_{ij} - суть функции независимых переменных $x_1, \dots, x_n$. Если функция $u = u(x_1, \dots, x_n$ является решением, то (2.7) являются тождествами и выполнено $L_1(L_2(u)) = L_2(L_1(u)) = 0$; последнее тождество можно записать в виде

$$L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = 0. \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) не зависит от вторых производных функции u и представляет собой также линейный дифференциальный опрератор

$$L_3(u) = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = \sum_{j=1}^{n} a_{3j} u_{x_j}.$$

Этот факт открыт Пуассоном. Выражение

$$[L_1, L_2] = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u))$$

носит название *скобок Пуассона.* Тем самым справедлива следующая

Теорема 2.1. *Если функция u является решением системы* (2.6)*, то она удовлетворяет также уравнению*

$$L_3(u) = L_1(L_2(u)) - L_2(L_1(u)) = 0. \tag{2.9}$$

Может получиться так, что уравнение (2.9) является линейно независимым с уравнениями (2.6). Тогда можно, применяя скобку Пуассона, получить еще уравнения

$$L_4(u) = [L_1(u), L_3(u)] = 0,\ L_5(u) = [L_2(u), L_3(u) = 0, \dots]$$

Определение 2.1. *Система m линейно независимых уравнений*

$$L_1(u) = 0, \dots, L_m(u) = 0 \tag{2.10}$$

называется замкнутой, если каждая скобка Пуассона $[L_i, L_j]$ $(i, j = 1, \dots, m)$ является линейной комбинацией операторов $L_1, \dots, L_m$.

Если система (2.10) не является замкнутой, то применяя скобки Пуассона, можно получить по крайней мере $m + 1$ уравнений, которая в свою очередь может оказаться как замкнутой, так и нет. Во втором случае, снова применяя скобки Пуассона, можно получить новую систему уравнений, порядок которой по крайней мере на единицу больше предыдущей. Поскольку число линейно независимых уравнений ограничено числом независимых переменных n, то этот процесс конечен.

Определение 2.2. *Будем говорить, что система линейно независимых уравнений* (2.10) *находится в инволюции или называется якобиевой системой, если всевозможные скобки Пуассона равны нулю тождественно:*

$$[L_i, L_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Известно [1], что любая замена переменных $Y = \Phi(X)$, где $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, сохраняет и свойство замкнутости, и свойство инволюционности системы (2.10).

2.1. Нормальная форма системы

Замкнутая система линейно независимых уравнений (2.10) может быть приведена к *нормальной форме*

$$L_1(u) = u_{x_1} + a_{1\,m+1}u_{x_{m+1}} + \ldots + a_{1\,n}u_{x_n} = 0, \tag{2.11}$$

$$L_2(u) = u_{x_2} + a_{2\,m+1}u_{x_{m+1}} + \ldots + a_{2n}u_{x_n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_m(u) = u_{x_2} + a_{m\,m+1}u_{x_{m+1}} + \ldots + a_{m\,n}u_{x_n} = 0.$$

Теорема 2.2. *Всякая нормальная замкнутая система есть система в инволюции.*

Доказательство может быть осуществлено непосредственной подстановкой.

2.2. Регулярные интегральные поверхности у систем 3-го порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,y,z), \quad \dot{y} = g(x,y,z)\,\dot{z} = h(x,y,z). \tag{2.12}$$

Изучим вопрос о существовании у этой системы достаточно регулярной интегральной поверхности $z = v(x,y)$. Напомним основные понятия, связанные с регулярными поверхностями [2].

Определение 2.3. *Элементарной поверхностью* Φ *называется связное множество точек пространства, являющееся образом элементарной области* G, *гомеоморфной кругу. Локально элементарная поверхность называется простой.*

Пусть u, v - декартовы координаты произвольной точки области G, x, y, z - координаты соответствующей точки поверхности Φ. Уравнения

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u,v)$$

называются *уравнениями поверхности в параметрической форме.*

Если каждая точка поверхности Φ допускает регулярную параметризацию (т.е. если функции f_i, определяющие уравнения поверхности, являются k раз непрерывно дифференцируемыми в области G), то поверхность Φ называется *регулярной.* Если $k = 1$, то поверхность называется *гладкой.*

Наибольшей наглядностью отличаются поверхности, допускающие параметризацию

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v).$$

Уравнения таких поверхностей могут быть записаны в форме

$$z = f(x,y). \tag{2.13}$$

Поверхность может быть задана и неявно:

$$\omega(x,y,z) = 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3. *Если* $\omega(x,y,z)$ *- регулярная функция своих переменных, то у точки* (x_0,y_0,z_0), *удовлетворяющей соотношениям*

$$\omega(x_0,y_0,z_0)=0, \quad (\nabla\omega(x_0,y_0,z_0))^2\neq 0,$$

есть окрестность такая, что точки пространства, удовлетворяющие соотношению (2.14) *и принадлежащие этой окрестности, образуют регулярную элементарную поверхность, определяемую уравнением* (2.13).

Доказательство.

По теореме о неявной функции существует в некоторой (δ,ε) - окрестности точки (x_0,y_0,z_0) функция (2.13) такая, что $\omega(x,y,f(x,y))=0$ при $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $|z-z_0|<\varepsilon$. Причем все точки указанного (δ,ε) - параллелепипеда, удовлетворяющие (2.14), исчерпываются значениями $(x,y,f(x,y))$ при $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$.

Доказательство закончено.

Необходимо отметить, что обратную задачу - задачу построения всего множества систем - дифференциальных уравнений, имеющих заданный частный интеграл, - решил Н.П. Еругин [2]. По Еругину, необходимым и достаточным условием существования интеграла $z=v(x,y)$ будет представимость правой части системы (2.12) в виде

$$\begin{pmatrix} cf \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_x \\ v_y \\ -1 \end{pmatrix} \star \Phi(x,y,z)+b(x,y,z),$$

где $\Phi(x,y,v(x,y))\equiv 0$, вектор b ортогонален вектору $(v_x,v_y,-1)^\star$.

Последнее соотношение приводит к дифференциальному уравнению с двумя квадратами производных

$$v_xf+v_yg-h=(v_x^2+v_y^2+1)\star\Phi(x,y,z),$$

которое показывпает, что характер зависимости функции Φ от z полностью определяется правой частью системы (2.12). Из последнего соотношения видно, что функцию Φ *всегда* можно искать в виде $\Phi(x,y,z)=(v_x^2+v_y^2+1)^{-1}\Phi_1(x,y,z)$.

Если предполагается наличие семейства регулярных поверхностей

$$z=v(x,y)+C, \tag{2.15}$$

то могут быть получены необходимые условия их существования. Действительно, имеем уравнение

$$v_xf+v_yg=h,$$

дифференцируя которое по z, получаем

$$v_xf_z+v_yg_z=h_z.$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} ccf & g \\ f_z & g_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cv_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ch \\ h_z \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Для существования у системы (2.12) семейства регулярных поверхностей (2.15) необходима, во-первых, алгебраическая разрешимость системы (2.16). Во-вторых, поскольку ищем регулярную поверхность, требуем выполнение условия интегрируемости $v_{xy}=v_{yx}$, которое приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^{-1}(hg_z - gh_z)) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta^{-1}(-hf_z - fh_z)). \tag{2.17}$$

Замечание 2.1. *Исследовать на наличие семейства регулярных поверхностей систему (аттрактор Росслера)*

$$\dot{x} = -y - z,\, \dot{y} = x + ay,\, \dot{z} = bx + (x - c)z. \tag{2.18}$$

Ищем интеграл вида $x = v(y, z) + C$. *Получаем систему уравнений*

$$\begin{pmatrix} ccx + ay & bx + (x - c)z \\ 1 & b + z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cv_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy + z \\ 0 \end{pmatrix};$$

приводим ее к нормальному виду:

$$\begin{pmatrix} cv_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\frac{(b+z)(y+z)}{bay+zay+zc} \\ -\frac{y+z}{bay+zay+zc} \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие интегрируемости:

$$v_{yz} - v_{zy} = z\frac{-ba - az + zc + c}{-2abz + cb - az^2 - b^2a}.$$

Последнее выражение тождественно равно нулю при $a = c$, $b = 1$.

3. Выводы

В статье излагаются методы исследования систем с распределенными параметрами, к которым приводят задачи обнаружения предельных режимов, а также развиваются методы качественного анализа процессов управления, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными. Предлагается методика изучения свойств решений этих систем путем рассмотрения этих решений на подвижных многообразиях различных форм.

Список литературы

1. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.

2. А. В. Зубов, О. А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, С. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, ВВМ, СПб., 2011, 362 с.

4. А. В. Зубов, К. А. Пешехонов, С. А. Стрекопытов, М. В. Стрекопытова, "Трехмерные квадратичные системы", *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 13-16.

5. С. В. Зубов, М. Б. Авдеева, И. С. Стрекопытов, “Последовательная локализация инвариантных множеств”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 9-12.

6. И. В. Зубов, В. И. Зубов, А. Ф. Зубова, А. И. Иванов, “Уравнение для регулярного интеграла”, *«Дифференциальные уравнения»*, Известия Российской академии естественных наук (Рязань), **17**, 2012, 17-20.

Combined systems of differential equations

© L. D. Blistanova[6], **V. I. Zubov**[7], **I. V. Zubov**[8], **S. A. Strecopitov** [9], **M. V. Strecopitova** [10]

Abstract. In article is supposes methods of investigation systems with distributive parameters, by that is bring tasks of foundation limits regimes, so is develops methods of qualitative analysis of process controlling, is describes systems differential equations with partial derivatives

Key Words: correlation, operator, function, system, solution, argument, derivative, equation, fact

[6] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[9] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[10] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru