УДК 517.929

Задача поиска матрицы минимального ранга

© С.В. Зубов [1]

Аннотация. Для квазилинейных систем стабилизации решена задача определения минимального числа управляющих воздействий (входов), при которых тривиальное решение этой системы можно сделать асимптотически устойчивым.

Ключевые слова: управляемая стационарная система, собственное число, матрица, асимптотическая устойчивость, левая полуплоскость, ранг матрицы, стабилизация, фазовая переменная

Для простоты изложения рассмотрим замкнутую линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{1.1}$$

где постоянную матрицу B размера $(n \times r)$ $(B \in R^{n \times r})$ можно выбрать надлежащим образом.

Поставим задачу поиска минимального числа p управляющих воздействий (задачу поиска матрицы B минимального ранга), при которых можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных $U = KX$, $K \in R^{p \times p}$ так, чтобы тривиальное решение системы

$$\dot{X} = AX + BKX \tag{1.2}$$

было асимптотически устойчивым, т. е. чтобы все собственные числа матрицы $A + BK$ лежали в левой полуплоскости [1,2].

О п р е д е л е н и е 1.1. *Назовем характеристикой линейной стабилизации системы* (1.1) *минимальное число* p *управляющих воздействий, при которых* ***путем выбора*** *матрицы* B *можно построить линейный закон управления относительно фазовых переменных* $U = KX$, $K \in R^{p \times p}$ *так, чтобы тривиальное решение системы* (1.2) *было асимптотически устойчивым, т. е. чтобы все собственные числа матрицы* $A + BK$ *лежали в левой полуплоскости.*

Пусть $n - k$ собственных чисел матрицы A лежат в левой полуплоскости, причем здесь и далее собственные числа считаются столько раз какова их кратность. Заметим, что с помощью невырожденного линейного преобразования $X = SY$ систему (1.1) можно привести к виду

$$\dot{Y}_1 = A_1 Y_1 + B_1 U, \quad A_1 \in R^{k \times k}, B_1 \in R^{k \times r}, \tag{1.3}$$

$$\dot{Y}_2 = A_2 Y_2 + B_2 U, \quad A_2 \in R^{(n-k) \times (n-k)}, B_2 \in R^{(n-k) \times r}, \tag{1.4}$$

где все собственные числа матрицы A_2, являясь собственными числами матрицы A, лежат в левой полуплоскости, а собственные числа матрицы A_1 совпадают с остальными собственными числами матрицы A, т. е. имеют неотрицательные вещественные части ($Re\lambda_i \geq 0$, $(i = \overline{1,k})$) [4].

[1] Доцент, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

З а м е ч а н и е 1.1. *В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат.*

О п р е д е л е н и е 1.2. *[3]. Характеристикой полной управляемости системы* (1.1) *называется минимальное число управляющих воздействий, при которых эту систему можно сделать полностью управляемой,* ***путем выбора*** *соответствующей матрицы B полного ранга. Иногда, для краткости, говорят о характеристике полной управляемости матрицы A.*

Т е о р е м а 1.1. *[3]. Характеристика полной управляемости матрицы A совпадает с максимальной геометрической кратностью ее собственных чисел.*

Доказательство этой теоремы целиком опирается на доказательство того, что если максимальная геометрическая кратность собственных чисел матрицы A равна p, то всегда можно выбрать p линейно независимых вещественных векторов $B_1, \ldots, B_p$, являющихся столбцами матрицы B так, что ранг матрицы $D = \{B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\}$ был равен n. Если же ранг матрицы B меньше p, то система (1.1) не является полностью управляемой [3].

Справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1.2. *Характеристика линейной стабилизации системы* (1.1) *совпадает с характеристикой полной управляемости матрицы A_1, т. е. с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости $Re\lambda_i \geq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что характеристика полной управляемости матрицы A_1 совпадает с максимальной геометрической кратностью собственных чисел матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости $Re\lambda_i \geq 0$, так как при преобразовании системы (1.1) к системе (1.3) -(1.4) имеет место равенство

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где матрица, стоящая в этом равенстве справа имеет клеточный вид. Отсюда в частности вытекает, что число собственных векторов, соответствующих собственным числам λ_i, $(i = \overline{1,k})$ матрицы A не принадлежащих левой полуплоскости ($Re\lambda_i \geq 0$) соответствует числу собственных векторов отвечающих тем же собственным числам λ_i, $(i = \overline{1,k})$ матрицы A_1. Это и доказывает утверждение сделанное выше.

Таким образом, в системе (1.3) - (1.4) мы можем положить $r = p$ и согласно теореме 1.1. [3] выбрать матрицу B_1 таким образом, что система (1.3) будет полностью управляемой. Тогда согласно известному результату [5] система (1.3) может быть сделана стабилизируемой с помощью линейного закона управления $U = KX$, $K \in R^{p \times n}$ относительно фазовых переменных, т. е. все собственные числа матрицы $A_1 + B_1K$ будут лежать в левой полуплоскости.

В этом случае матрица системы (1.3) -(1.4) примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1K & 0 \\ B_2K & A_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все собственные числа лежат в левой полуплоскости, т. к.

$$det(D - \lambda E) = det(A_1 + B_1K - \lambda E)det(A_2 - \lambda E).$$

В работе [5] показано, что если система (1.3) не является полностью управляемой, то при любом линейном законе управления $U = KX$ собственные числа матрицы $A_1 + B_1K$ не будут лежать в левой полуплоскости. Это означает, что если число управлений в системе (1.1) меньше p, то систему (1.1) нельзя стабилизировать с помощью линейного закона управления относительно фазовых переменных $U = KX$.
Доказательство закончено.

Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$\dot{X} = AX + BU + F(t, X, U) \tag{1.5}$$

где векторная функция F определена при $t \geq 0$, $\|X\| \leq L_1$, $\|U\| \leq L_2$ и удовлетворяет условиям

$$\|F(t, X, U)\| \leq L_3(\|X\| + \|U\|)^{1+\alpha},\ \alpha - const,\ l_1, L_2, L_3 - const,$$

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

По аналогии с результатами, приведенными в монографии [5] на основе введения соответствующей функции Ляпунова можно показать, что справедлива теорема.

Теорема 1.3. *Положение равновесия $X = 0$ системы (1.5) можно сделать асимптотически устойчивым путем выбора матрицы B и управления U, удовлетворяющего условию*

$$\|U\| \leq \beta\|X\|, \quad \beta - const > 0$$

тогда и только тогда, когда $rangB \geq p$, где p - характеристика линейной стабилизации матрицы A.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. №10 – 08 – 00624).

Список литературы

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М., 2002.

2. Р. Габасов, Ф. Кирилова., *Качественная теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1971.

3. Зубов А.В., Дикусар В.В., Зубов Н.В., “Проблемы полной управляемости и структурной минимизации”, *Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем*, **32** (2008), 32-39.

4. Гантмахер Ф.Д., *Теория матриц*, Наука, М., 1967.

5. В.И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975.

6. А.Ф. Зубова, *Математические методы исследования надежности колебательных систем в технике и технологических процессах*, СПбГУ, СПб., 2007, 339 с.

7. Н.В. Зубов, А.Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем*, НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2010, 342 с.

The task of researches matrix minimum rank

© **S. V. Zubov** [2]

Abstract. For kvasilinear systems of stabilization is solved task of definition minimum number controlling actions (entrances), by that trivial solution this system one can to make asymptotic stability.

Key Words: controlling stationary system, own number, matrix, asymptotical stability, left subplane, rank of matrix, stabilization, faze variable

[2] Docent, faculty AM-PC SPbGU, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru