УДК 517.929

Задача построения систем дифференциальных уравнений

© А. В. Зубов [1], К. А. Пешехонов [2], С. А. Стрекопытов [3], М. В. Стрекопытова [4]

Аннотация. Решена задача построения таких систем дифференциальных уравнений, для которых задаваемое предельное множество в виде замкнутой гладкой компактной поверхности будет интегральным и асимптотически устойчивым по Ляпунову инвариантным множеством.

Ключевые слова: независимая переменная, множество, стационарный интеграл, скалярная функция

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x + z + xz, \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = x^2/2 + C$, где $C = const$. В связи с этим систему (1.1) можно привести к одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = C + (1 + C)x + x^2/2 + x^3/2. \tag{1.2}$$

Умножим обе части (1.2) на $\dot{x}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t. Получим

$$\dot{x}^2/2 = C_1 + Cx + (1 + C)x^2/2 + x^3/6 + x^4/8 \qquad (C_1 = const). \tag{1.3}$$

Извлечем квадратный корень и проинтегрируем снова; получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C_1 + 2Cx + (1 + C)x^2 + x^3/3 + x^4/4}} = t + C_2 \qquad (C_2 = const). \tag{1.4}$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.4), является гиперэллиптическим [1]. Гиперэллиптические функции, появляющиеся при обращении этого интеграла, когда мы хотим явно выписать решение $x(t)$ системы (1.1), характеризуются наличием нескольких периодов, которые зависят от начальных данных.

Рассмотрим еще одну систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= xz + a, \\ \dot{z} &= 4xy + 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Эта система имеет семейство интегралов $z = 2x^2 + t + C$, что позволяет привести (1.5) к одному уравнению второго порядка $\ddot{x} = 2x^3 + (t + C)x + a$. С помощью подстановки $x = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(t + C)$ это уравнение приводится к нормальному виду Пенлеве [2]

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha. \tag{1.6}$$

[1] доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г.Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] к.ф.-м.н., доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Пенлеве показал, что решения уравнения (1.6) описываются принципиально новыми транцендентными функциями, которые не сводятся к ранее изученным функциям и которые стали называть транцендентными функциями Пенлеве [1].

Ученик Пенлеве Ж. Шази (1882-1955) изучал, в частности, уравнение $y'' = 2yy'' - 3y'^2$, к которому приводится квадратичная система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = 2xz - 3y^2$. Шази установил, что интеграл столь простого по виду уравнения имеет весьма сложные особенности и связан с интегралами гипергеометрического уравнения и функциями Шварца.

Приведенные примеры показывают, что решения систем дифференциальных уравнений простой структуры могут иметь чрезвычайно сложную аналитическую природу. «Простота» структуры дифференциальных уравнений обманчива. Известные примеры квадратичных систем, описывающих системы со странными аттракторами, также указывают на это.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= h(x, y, z). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Предположим, что у системы (1.7) существует стационарный интеграл

$$v(x, y, z) = c. \tag{1.8}$$

По нашему предположению имеем $\nabla v = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2$, где μ_1, μ_2 - скалярные функции независимых переменных x, y, z.

Если функция v представима в виде $v = v_1 + v_2$, так что выполнено соотношение $\nabla v = \nabla v_1 + \nabla v_2$, а векторы ∇v_1, ∇v_2 коллинеарны соответственно векторам g_1, g_2, то справедливы последующие рассуждения. По нашему предположению функция (1.8) существует, следовательно, хотя бы при одном $i = 1, 2$ имеет нетривиальное решение система уравнений

$$\nabla v_i = \mu g_i, \tag{1.9}$$

где $\mu = \mu(x, y, z)$ - некоторая скалярная функция. Выпишем условия интегрируемости уравнений (1.9) в матрично-векторной форме для $i = 1$:

$$A_1 \nabla \mu = \mu F_1. \tag{1.10}$$

Заметим, что матрица A_1, в силу своей структуры, является вырожденной при любых f, g, h. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнений (1.10) возможно лишь тогда, когда вектор F лежит в подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A:

$$rank(A) = rank(A, F).$$

Нетривиальным решением для нас будет также ситуация, когда $F_1 = 0$, при этом получается $\mu(x, y, z) = const$. При $i = 2$ получаем следующие значения для матрицы A и вектора F:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -h(g-h) + f(f-g) & g(f-g) - h(h-f) & 0 \\ -f(h-f) + g(g-h) & 0 & g(f-g) - h(h-f) \\ 0 & -f(h-f) + g(g-h) & h(g-h) - f(f-g) \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 также вырожденная, и решение возможно тоже не всегда.

Таким образом, в вырожденных случаях система дифференциальных уравнений для функций μ_1, μ_2 выглядит следующим образом:

$$A_1\nabla\mu_1 + A_2\nabla\mu_2 = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2. \tag{1.11}$$

Это - система трех дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций. Для ее исследования заметим сначала, что, поскольку матрицы A_1, A_2 вырожденные, уравнения (1.11) не могут быть разрешены относительно всех трех производных μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} или μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, но в общем случае система (1.11) может быть разрешена относительно двух производных, например по x, y:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\mu_1}{\partial x} &= a(x,y,z)\mu_1 + A(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}),\\ \tfrac{\partial\mu_1}{\partial y} &= b(x,y,z)\mu_1 + B(x,y,z,\mu_2,\mu_{2_x},\mu_{2_y},\mu_{2_z}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь A, B - линейные функции по μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}. Дифференцируя первое уравнение по y, а второе по x, получаем $(a_y - b_x)\mu_1 = L[\mu_2]$, где $L[\mu_2] = -(aB - bA + \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dy})-$ дифференциальный оператор второго порядка. Р. Курант [3] показал, что в аналитическом случае условие

$$a_y = b_x \tag{1.13}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости системы.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Необходимым условием существования стационарного интеграла для системы* (1.11) *является выполнение условий* (1.13).

В самом общем случае, приведем систему (1.10) к следующему виду: члены, содержащие величины μ_2, μ_{2_x}, μ_{2_y}, μ_{2_z}, перенесем в правую часть, содержащие величины μ_1, μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} - в левую [5]. Введем новые неизвестные величины $\alpha_1(x,y,z)$, $\alpha_2(x,y,z)$, $\alpha_3(x,y,z)$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 &= \alpha_1,\\ A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_z} + F_1[2]\mu_1 &= \alpha_2,\\ A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_z} + F_1[3]\mu_1 &= \alpha_3,\\ A_2[1,1]\mu_{2_x} + A_2[1,2]\mu_{2_y} + F_2[1]\mu_2 &= \alpha_1,\\ A_2[2,1]\mu_{2_x} + A_2[2,3]\mu_{2_z} + F_2[2]\mu_2 &= \alpha_2,\\ A_2[3,2]\mu_{2_y} + A_1[3,3]\mu_{2_z} + F_1[3]\mu_2 &= \alpha_3. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Мы получили две группы уравнений, первую из которых - для неизвестной функции μ_1, вторую - от μ_2.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка такие уравнения называются общими линейными [2] или линейными неоднородными [4].

Не ограничивая общности, рассмотрим первые три уравнения (1.14).

$$\begin{aligned} X_1(\mu_1) &= A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y} + F_1[1]\mu_1 - \alpha_1 = 0,\\ X_2(\mu_1) &= A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_x} + F_1[2]\mu_1 - \alpha_2 = 0,\\ X_3(\mu_1) &= A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_x} + F_1[3]\mu_1 - \alpha_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Введем обозначения

$$\bar{X}_1(\mu_1) = A_1[1,1]\mu_{1_x} + A_1[1,2]\mu_{1_y},$$

$$\bar{X}_2(\mu_1) = A_1[2,1]\mu_{1_x} + A_1[2,3]\mu_{1_x},$$

$$\bar{X}_3(\mu_1) = A_1[3,2]\mu_{1_y} + A_1[3,3]\mu_{1_x}.$$

Поскольку матрица A_1 вырожденная, из системы (1.15) невозможно найти величины μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z}. Приведем систему (1.15) к замкнутой форме. В общем случае можно взять два линейно независимых по μ_{1_x}, μ_{1_y}, μ_{1_z} уравнения, например X_1, X_2 и составить скобку Якоби:

$$[X_1, X_2] = A_1[1,1](\frac{\partial X_2}{\partial x} + \mu_{1_x} F_1[2]) - A_1[2,1](\frac{\partial X_1}{\partial x} + \mu_{1_x} F_1[1]) +$$

$$+ A_1[1,2](\frac{\partial X_2}{\partial y} + \mu_{1_y} F_1[2]) - A_1[2,3](\frac{\partial X_1}{\partial z} + \mu_{1_z} F_1[2]).$$

Известно [2, 4], что $[X_1, X_2] = \bar{X}_1(X_2(\mu_1)) - \bar{X}_2(X_1(\mu_1))$. Может оказаться так, что получившееся уравнение линейно независимо с уравнениями X_1, X_2, тогда получившуюся систему можно разрешить относительно μ_1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1950.
2. Э. Камке, *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных*, Наука, М., 1966.
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
4. Н. М. Гюнтер, *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных*, ОНТИ, Л., 1934.
5. А. В. Зубов, И. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ систем управления и равновесных движений*, Мобильность-плюс, СПб., 2011, 347 с.

The task of building systems differential equations

© A.V. Zubov[5], K.A. Peshechonov[6], S.A. Strecopitov[7], M. V. Strecopitova[8]

Abstract. In giving article is solves the task of building that systems of differential equations, for that set limiting multitude in case exclusive smooth compact surface will be integral and asymptotic stability, and stability on Lapunov's invariant multitude.

Key Words: independent variable, multitude, stationary integral, scalarity function

[5] docent SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] lecturer SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] docent SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru